Andregradsformelen

Vi vil nå gjennomføre regnearbeidet med å løse andregradslikninger en gang for alle. Vi løser da den generelle likningen, og setter opp resultatet som en formel til fri avbenyttelse i enhver aktuell problemstilling som måtte dukke opp. Omformingen av andregradslikningen følger den strategien som ble etablert gjennom de to foregående likningene, der selve poenget ligger i omformingen til fullstendig kvadrat.

Vi minner om forutsetningen $a \neq 0$ for å ha en andregradslikning, og som første skritt i omformingen deler vi nå med a på begge sider.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Big| : a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Fra de to første leddene på venstresiden ser vi lett hvilket ledd som mangler for å få det tilhørende fullstendige kvadratet:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Vi må altså legge til kvadratet av halvparten av faktoren foran x i førstegradsleddet (*halvere, kvadrere*), for å få på plass det tilhørende fullstendige kvadratet. Først flytter vi, for oversiktens skyld, konstantleddet over til høyresiden:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad \Big| + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

På høyresiden i likningen settes alt på felles brøkstrek, og vi får:

$$(*) \qquad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Herfra deler vi resten av løsningsprosessen inn i tre ulike tilfeller, avhengig av verdien i uttrykket på høyresiden: I) *Høyresiden er positiv*, II) *Høyresiden er lik null* og III) *Høyresiden er negativ*.

I) Høyresiden er positiv, dvs. $b^2 - 4ac > 0$

Positive tall kan vi ta kvadratrot av, så nå kan vi skrive høyresiden som et kvadrattall:

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}^{\,2} = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2$$

I likningen $(*)$ skriver vi høyresiden som et kvadrattall, og får nok en likning:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2$$

Samler alle ledd på venstresiden:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = 0$$

Danner produkt ved hjelp av 3. kvadratsetning:

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

Dette produktet er null dersom enten første eller andre faktor er lik null, og da har vi altså kommet fram til at andregradslikningen i dette tilfellet har to ulike reelle løsninger.

De to løsningene er:

$$x = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{og} \qquad x = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Eller skrevet på en mer kompakt måte:

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

II) **Høyresiden er lik null**, dvs. $b^2 - 4ac = 0$

Andregradslikningen $(*)$ blir i dette tilfellet:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0, \quad \text{dvs. da må} \quad x + \frac{b}{2a} = 0$$

Likningen har altså kun en reell løsning:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Vi kan også si at likningen har to like (sammenfallende) reelle løsninger i dette tilfellet.

III) **Høyresiden er negativ**, dvs. $b^2 - 4ac < 0$

Venstresiden i andregradslikningen $(*)$ er et kvadrattall, og som vi vet så er alle kvadrattall positive eller eventuelt lik null. I alle fall aldri negative ! Det er dermed altså umulig å oppnå likhet mellom venstresiden og høyresiden.

Likningen har ingen reelle løsninger i dette tilfellet.

Oppsummering

Andregradslikning $\quad ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$

I) $b^2 - 4ac > 0$: To ulike løsninger

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

II) $b^2 - 4ac = 0$: Kun en løsning $\quad x = -\dfrac{b}{2a}$

III) $b^2 - 4ac < 0$: Ingen reelle løsninger

Vi løste innledningsvis noen andregradslikninger ved å omarbeide dem via fullstendig kvadrat til formen: "*produkt* = 0". Nå har vi altså løst andregradslikninger en gang for alle, dvs. vi slipper mellomregning og kan gå direkte inn i formelen for løsningene i et av de tre tilfellene. Pass bare på at likningene i utgangspunktet er på den riktige formen, med null på høyresiden, før du setter inn verdier for a, b og c.