MAT1000 Matematikk for økonomer

EKSAMEN 09.12.2021

Løsningsforslag til oppgave 4

Universitetet i Sørøst-Norge
Handelshøyskolen

Roy M. Istad

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x, y) = x^2 - 3x - xy + y^2$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.

Partielle deriverte av 1. orden: $\frac{\partial h}{\partial x} = 2x - 3 - y$ og $\frac{\partial h}{\partial y} = -x + 2y$

2. orden: $\underbrace{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 2}_{A}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = -1 \underset{B}{=} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = -1$, $\underbrace{\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 2}_{C}$

Vis at h har kun ett stasjonært punkt: $(2, 1)$.

$\frac{\partial h}{\partial x} = 2x - 3 - y = 0 \rightarrow 2 \cdot 2y - 3 - y = 0 \rightarrow 3y = 3$, eller $y = 1$

og

$\frac{\partial h}{\partial y} = -x + 2y = 0 \xrightarrow{1} x = 2y \xrightarrow{4} x = 2 \cdot 1$, eller $x = 2$

2

3

Altså, ett stp.pkt: $(2, 1)$

Klassifiser det stasjonære punktet.

St.pkt	A	C	B	$\Delta = AC - B^2$	Type
(2, 1)	2	2	-1	$2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3$ ($\Delta > 0$ og $A > 0$)	Lokalt minimum

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x,y) = x^2 - 3x - xy + y^2$

b) Finn minimum for funksjonen h under bibetingelsen: $x + y = 2$.

Bibetingelsen kan omskrives til : $y = 2 - x$

Setter inn (substituerer) i h:

$$z = h(x,y) = h(x, 2-x) = x^2 - 3x - x(2-x) + (2-x)^2$$
$$= x^2 - 3x - 2x + x^2 + 4 - 4x + x^2 = 3x^2 - 9x + 4 = g(x)$$

$g'(x) = 6x - 9 = 6(x - \frac{3}{2}) = 0$, dvs. $x = \frac{3}{2}$ $\longrightarrow$ $y = 2 - x = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

Minimum? Sjekk g'': $g''(x) = 6 > 0$, dvs. g er konveks og har minimum

$$g(\tfrac{3}{2}) = 3(\tfrac{3}{2})^2 - 9(\tfrac{3}{2}) + 4 = \tfrac{27}{4} - \tfrac{27}{2} + 4 = -\tfrac{11}{4}$$

Konklusjon - Minimum for h under bibetingelsen: $\underline{\underline{z = h(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{11}{4}}} \approx -2.75$