MAT1000 Matematikk for økonomer

EKSAMEN 09.12.2021

Løsningsforslag til oppgave 2

Universitetet i Sørøst-Norge
Handelshøyskolen

Roy M. Istad

Oppgave 2

a) Funksjonen g er gitt ved at: $g(x) = \dfrac{3x+2}{3x-2}$

For hvilken x-verdi er ikke g definert?

Nevner kan ikke være 0: $3x - 2 \neq 0 \;\rightarrow\; 3x \neq 2 \;\rightarrow\; \underline{\underline{x \neq \frac{2}{3}}}$

Finn skjæringspunktene mellom g og koordinataksene.

Skjæringspkt. med y-aksen (sett $x = 0$): $y = g(0) = \frac{3\cdot 0+2}{3\cdot 0-2} = \frac{2}{-2} = -1$

Skjæringspkt. med x-aksen (sett $y = 0$): $y = g(x) = \frac{3x+2}{3x-2} = 0$ NB! Brøk er 0 når teller er 0

$3x + 2 = 0 \;\rightarrow\; 3x = -2 \;\rightarrow\; x = -\frac{2}{3}$

Skjæringspkt. med aksene er altså: $\underline{\underline{(x, y) = (0, -1)}}$ og $\underline{\underline{(x, y) = (-\frac{2}{3}, 0)}}$

Oppgave 2

a) Funksjonen g er gitt ved at: $\quad g(x) = \dfrac{3x+2}{3x-2}$

Bestem $g'(x)$ og bruk denne til å vise at g ikke har noen ekstrempunkt.

$$g'(x) = \frac{(3x+2)'\cdot(3x-2) - (3x+2)\cdot(3x-2)'}{(3x-2)^2} = \frac{3\cdot(3x-2) - (3x+2)\cdot 3}{(3x-2)^2} = \frac{9x-6-9x-6}{(3x-2)^2} = \underline{\underline{\frac{-12}{(3x-2)^2}}}$$

$g(x)$ har ingen ekstrempunkt fordi $g'(x)$ ikke kan bli 0 (siden telleren i brøken er -12).
Her er altså $g'(x) < 0$ for alle x, og g er derfor avtagende for alle x i definisjonsområdet.

b) Gitt funksjonen $h(x) = (2x+1)e^{-x^2}$

Vis at $h'(x) = (2-2x-4x^2)e^{-x^2}$ og bruk dette til å finne eventuelle ekstrempunkt for h.

$$h'(x) = (2x+1)'\cdot e^{-x^2} + (2x+1)\cdot(e^{-x^2})' = 2\cdot e^{-x^2} + (2x+1)\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)$$

$$= \underline{\underline{(2-2x-4x^2)e^{-x^2}}}$$

Oppgave 2

Vis at $h'(x) = (2-2x-4x^2)e^{-x^2}$ og bruk dette til å finne eventuelle ekstrempunkt for h.

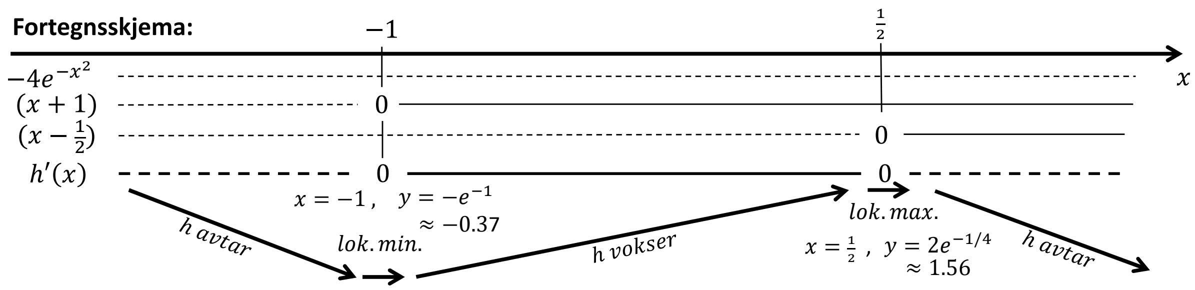
$$h'(x) = (2-2x-4x^2)e^{-x^2} = 2(1-x-2x^2)e^{-x^2}$$

$h'(x) = 0$ når: $1-x-2x^2 = 0$, dvs. $2x^2+x-1 = 0$

Andregradsformelen: $\quad x = \dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot2\cdot(-1)}}{2\cdot2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{-1\pm3}{4} = \begin{cases} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{-4}{4} = -1 \end{cases}$

$$h'(x) = (2-2x-4x^2)e^{-x^2} = 2(1-x-2x^2)e^{-x^2} = -4\left(x-\tfrac{1}{2}\right)(x+1)e^{-x^2}$$

Fortegnsskjema:



Oppgave 2

Ekstra (ikke krav om dette i besvarelsen)

b) Gitt funksjonen $h(x) = (2x+1)e^{-x^2}$

Vis at $h'(x) = (2 - 2x - 4x^2)e^{-x^2}$ og bruk dette til å finne eventuelle ekstrempunkt for h.

Kun lokale, eller også globale ekstrempunkt?

$\frac{1}{e^{\infty}} \rightarrow 0$

$x \rightarrow -\infty$: $\quad y = h(x) \rightarrow 2xe^{-x^2} \rightarrow -\infty \cdot e^{-(-\infty)^2} \rightarrow -\infty \cdot e^{-\infty} \rightarrow 0^{\div}$

$x \rightarrow +\infty$: $\quad y = h(x) \rightarrow 2xe^{-x^2} \rightarrow \infty \cdot e^{-(\infty)^2} \rightarrow \infty \cdot e^{-\infty} \rightarrow 0^{+}$

$y \rightarrow 0^{\div}$: y –verdiene nærmer seg 0 «nedenfra», de er litt negative.

$y \rightarrow 0^{+}$: y –verdiene nærmer seg 0 «ovenfra», de er litt positive.

Da vet at begge lokale ekstrempunkt også er globale.

Her holder det å vise til grafen for å fastslå det samme, se grafutsnittet: