MAT1000 Matematikk for økonomer

EKSAMEN 09.12.2021

Løsningsforslag til oppgave 1

Universitetet i Sørøst-Norge
Handelshøyskolen

Roy M. Istad

Oppgave 1

Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

a) Regn ut funksjonsverdiene til følgende x-verdier: $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3.$

Funksjonsverditabell:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	0	-9	-8	-9	0	55

Resten er beregnet på samme måte.

Regner ut y-verdi detaljert: Ser på både $x = \pm 2$

$$y = f(\pm 2) = (\pm 2)^4 - 2(\pm 2)^2 - 8$$
$$= 16 - 2 \cdot 4 - 8 = 16 - 8 - 8 = \underline{\underline{0}}$$

NB! pga. x^4 og x^2 så forsvinner fortegnet ($\pm$) i utregningene (og grafen blir symmetrisk om y-aksen).

Vis at $f(x)$ kan skrives som
$$f(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 2)$$

Multipliser ut på høyresiden:

$$(x^2 - 4)(x^2 + 2)$$
$$= x^2 \cdot x^2 + x^2 \cdot 2 - 4 \cdot x^2 - 4 \cdot 2$$
$$= x^4 + 2x^2 - 4x^2 - 8$$
$$= x^4 - 2x^2 - 8 = f(x) \quad \textbf{Ok!}$$

Bestem nullpunktene til f

Søker x slik at: $y = f(x) = 0$

Løsning? Produkt $= 0$ → Faktorisering av $f(x)$

dvs. $f(x) = 0$ *når* $(x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0$

$$0 = (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 2)$$ NB! 3.KVS på første parentes
$$= (x + 2)(x - 2) \cdot (x^2 + 2)$$ NB! $(x^2 + 2) \neq 0$

altså *når* $\underline{\underline{x = -2}}$ eller *når* $\underline{\underline{x = 2}}$

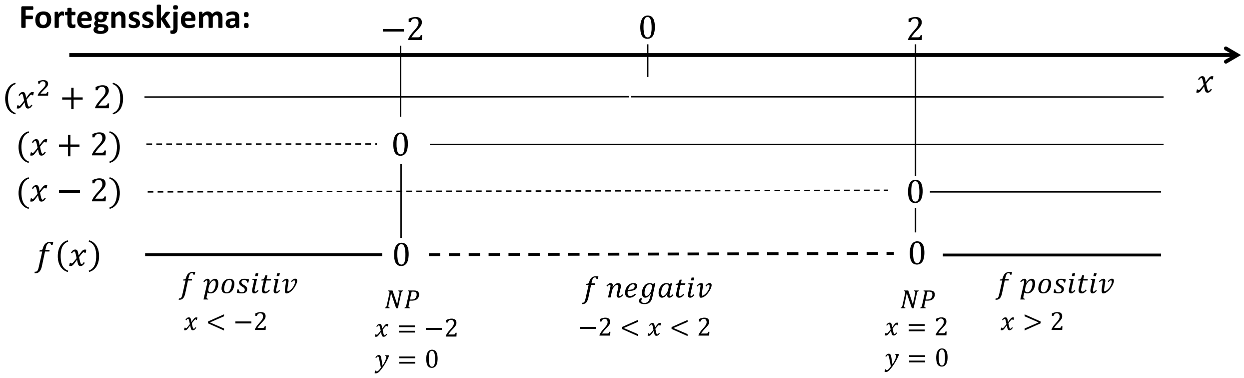
Oppgave 1

Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

a) avgjør hvor funksjonen er positiv, og hvor den er negativ.

Faktorisering: $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 2) = (x + 2)(x - 2) \cdot (x^2 + 2)$

Fortegnsskjema:



Oppgave 1

Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

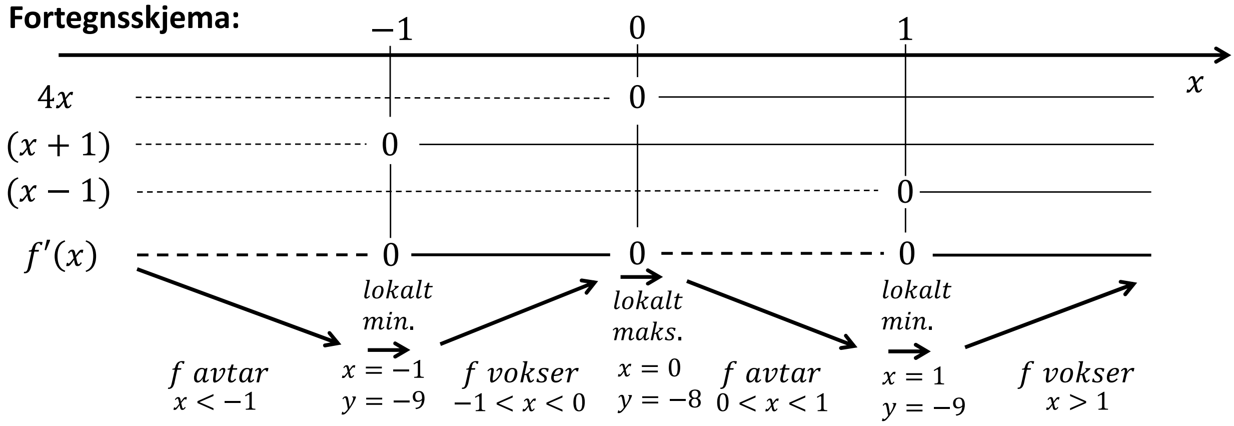
b) Bestem $f'(x)$. $f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} - 2(2 \cdot x^{2-1}) - 0 = \underline{\underline{4x^3 - 4x}}$

Avgjør hvor funksjonen f er voksende og hvor den er avtagende.

Faktorisering:

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x\,(x^2 - 1) \overset{\text{3.KVS}}{=} 4x(x + 1)(x - 1)$

Fortegnsskjema:



Oppgave 1

Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

b) Finn lokale ekstrempunkt for f og avgjør om noen av dem er globale.

1) Lokalt minimum når: $x = -1$, eller $x = 1$

Omskriver først (fullstendig kvadrat): $y = f(x) = (x^2)^2 - 2 \cdot 1 \cdot x^2 + 1 - 1 - 8$

dvs. $y = f(x) = \underbrace{(x^2-1)^2}_{\geq 0} - 9 \geq -9$, dvs. alle y-verdier er større enn, eller -9

dette inntreffer når $x^2 = 1$, dvs. $x = \pm 1$

Da må disse også gi globalt minimum for f: $x = \pm 1$, $y = -9$

2) Lokalt maksimum i punktet: $x = 0$, $y = -8$

Fra tabellen i pkt a) ser vi f.eks. at y -verdiene for $x = \pm 2$ er lik 0, og da større enn -8!
Altså har ikke f noe globalt maksimum (i det eneste kandidatpunktet).

Oppgave 1

Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

c) Bestem $f''(x)$. $f'(x) = 4x^3 - 4x \rightarrow f''(x) = 4 \cdot (3x^{3-1}) - 4 \cdot 1 = \underline{\underline{12x^2 - 4}}$

Avgjør hvor grafen til f er konkav, og hvor den er konveks og finn vendepunktene til f.

Faktorisering: $f''(x) = 12x^2 - 4 = 12\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \overset{\text{3.KVS}}{=} 12\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\approx 12(x + 0.58)(x - 0.58)$

$y = f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 - 2\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 8$

$= \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} - 8 = -\frac{77}{9} \approx -8.56$

Obs! $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.5773 \approx 0.58$

Fortegnsskjema

x		-0.58		0.58	
12	———	———	———	———	———
$(x + 0.58)$	- - -	0	———	———	———
$(x - 0.58)$	- - -	- - -	- - -	0	———
$f''(x)$	f'' pos → f' veks	0	f'' neg → f' tek av	0	———
	f *konveks* $x < -0.58$	vende-punkt $x = -0.58$ $y = -8.56$	f *konkav* $-0.58 < x < 0.58$	vende-punkt $x = 0.58$ $y = -8.56$	f *konveks* $x > 0.58$

Oppgave 1

Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

c) Skisser grafen til f

Husk å kontrollere !!

Fra pkt. a)

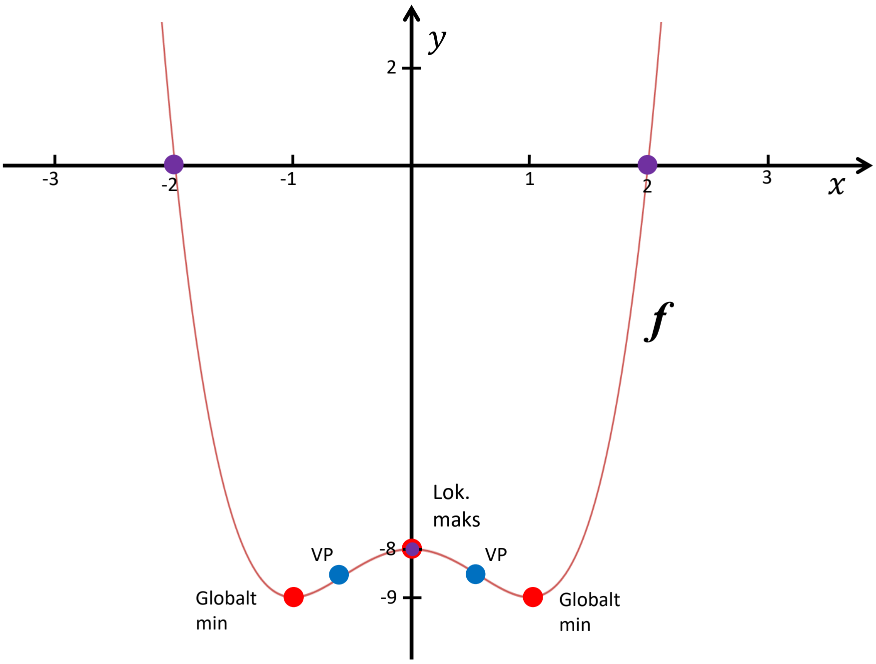
Først funksjonsverditabellen

x	-2	-1	0	1	2	3
y	0	-9	-8	-9	0	55

Så nullpunkt: $y = f(x) = 0$
når $x = -2$, eller $x = 2$

Fra pkt. b): Info fra $f'(x)$

Fra pkt. c): Info fra $f''(x)$

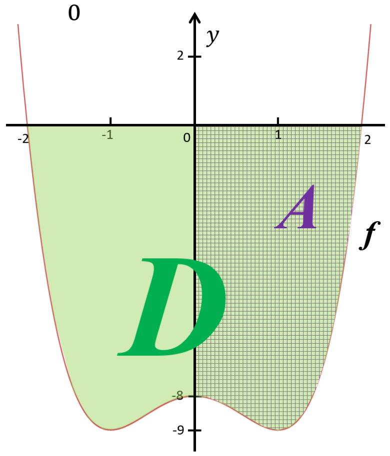


Oppgave 1

Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

d) Regn ut verdien av det bestemte integralet: $\int_0^2 (-x^4 + 2x^2 + 8)\, dx$

$$A = \int_0^2 (-x^4 + 2x^2 + 8)\, dx = \left[-\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{2}{3}x^3 + 8x \right]_0^2 = \left(-\tfrac{1}{5}2^5 + \tfrac{2}{3}2^3 + 8 \cdot 2 \right) - 0$$



$$= -\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 16 = \frac{-32 \cdot 3 + 16 \cdot 5 + 16 \cdot 15}{5 \cdot 3} = \underline{\underline{\frac{224}{15}}} \approx 14.93$$

Finn størrelsen på arealet som er avgrenset av grafen til f og x-aksen. NB! f er negativ (under y-aksen), må integrere $-f(x)$

$$D = \int_{-2}^{2} -f(x)\, dx = \int_{-2}^{2} (-x^4 + 2x^2 + 8)\, dx$$

$$= 2 \cdot \int_0^2 (-x^4 + 2x^2 + 8)\, dx = 2 \cdot \frac{224}{15} = \underline{\underline{\frac{448}{15}}} \approx 29.87$$

Altså, $D = 2A$