Universitetet i Sørøst-Norge

EKSAMENSFORSIDE

Skriftlig individuell hjemmeeksamen

<table>
<tr><td colspan="2">Emnekode:
MAT1000</td><td colspan="2">Emnenavn:
Matematikk for økonomer</td></tr>
<tr><td colspan="2">Faglærere:
Roy M. Istad
Gorm Jacobsen
Tor M. Kvikstad
Sviatlana Lapaukhava Frog
Bjørn Hansen</td><td>Campus:
Bø
Drammen
Kongsberg
Ringerike
Vestfold</td><td>Fakultet:
HH</td></tr>
<tr><td colspan="3">Utlev. dato og tidspunkt i WISEflow:
09.12.2021 – kl.09:00</td><td>Innlev. dato og tidspunkt i WISEflow:
09.12.2021 – kl.13:00</td></tr>
<tr><td colspan="2">Antall oppgaver:
4</td><td>Antall vedlegg:
1 (Formelsamling)</td><td>Ant. sider inkl. forside og vedlegg:
9</td></tr>
</table>

Hjelpemidler og samarbeid:

Tillatte hjelpemiddel: Alle hjelpemiddel er tillatt.

	Ja	Nei
Er det individuell eksamen?	☒	☐
Er det tillatt å samarbeide med andre personer?	☐	☒

Kriterier for besvarelsen:

- Besvarelsen skal bestå av kun ett dokument (pdf).
- Skriv tydelig oppgavenummer, sett arkene i oppgaverekkefølge og merk oppgaver med «Ubesvart» om det er aktuelt.
- Alle svar skal begrunnes med eget regnearbeid.
- Unngå både beskrivelse av kalkulatortrykking og «klipp-og-lim» (ren avskrift) fra matematisk programvare (f.eks. Geogebra).

KANDIDATEN MÅ SELV KONTROLLERE AT OPPGAVESETTET ER FULLSTENDIG

Universitetet i Sørøst-Norge
Handelshøyskolen

EKSAMEN
09.12.2021

MAT1000 - MATEMATIKK FOR ØKONOMER

Tid:	4 timer (09:00 - 13:00)
Sidetall:	2
Hjelpemiddel:	Alle (hjemmeeksamen) Mottak av hjelp, eller samarbeid er ikke tillatt
Vekting:	Alle delspørsmål teller likt (10 % hver)
Merknad:	Alle svar skal begrunnes

Bokmål

Oppgave 1

Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

a) Regn ut funksjonsverdiene til følgende x-verdier: $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$.
Vis at $f(x)$ kan skrives som $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 2)$
Bestem nullpunktene til f og avgjør hvor funksjonen er positiv, og hvor den er negativ.

b) Bestem $f'(x)$, og avgjør hvor funksjonen f er voksende og hvor den er avtagende.
Finn lokale ekstrempunkt for f og avgjør om noen av dem er globale.

c) Bestem $f''(x)$. Avgjør hvor grafen til f er konkav, og hvor den er konveks og finn vendepunktene til f.
Skisser grafen til f. NB! Håndtegnet, ikke utskrift fra matematikkprogram.

d) Regn ut verdien av det bestemte integralet: $\displaystyle\int_0^2 (-x^4 + 2x^2 + 8)\,dx$
Finn størrelsen på arealet som er avgrenset av grafen til f og x-aksen.

Oppgave 2

a) Funksjonen g er gitt ved at: $g(x) \; = \; \dfrac{3x+2}{3x-2}$

For hvilken x-verdi er ikke g definert?

Finn skjæringspunktene mellom g og koordinataksene.

Bestem $g'(x)$ og bruk denne til å vise at g ikke har noen ekstrempunkt.

b) Gitt funksjonen $h(x) \; = \; (2x+1)e^{-x^2}$

Vis at $h'(x) \; = \; (2-2x-4x^2)e^{-x^2}$ og bruk dette til å finne eventuelle ekstrempunkt for h.

Oppgave 3

a) Anne har satt inn i banken et beløp på 25 000 kr til en rente på 1.5 % årlig.
Hva er verdien av beløpet etter 1 år, 3 år og etter 10 år?
Hvor mange år går det før verdien av beløpet er 30 000 kr?

Jonas kjøpte i 2015 en leilighet på fjellet til 1 800 000 kr. Etter 5 år solgte han leiligheten for 2 200 000 kr. Hva var gjennomsnittlig årlig prosentvis verdistigning på leiligheten i de 5 årene Jonas eide den?

b) Bjarne tok i 2019 opp et lån på 2 500 000 kr til kjøp av hus. Renten på lånet er 1.7 % årlig, og lånet betales over 20 år med like store årlige beløp, første gang var ett år etter låneopptaket. Hva er det årlige beløpet Bjarne betaler på lånet?

Umiddelbart etter andre betaling på lånet i 2021 ble renta satt opp til 2.0 % årlig. Det fører til at de årlige beløpene må økes hvis avtalt betalingsperiode skal ligge fast. Bjarne ønsker imidlertid å foreta en ekstra betaling i 2022 slik at det årlige beløpet fra 2023 og utover blir det samme som han betalte i 2020 og 2021. Hvor mye må Bjarne betale på lånet i 2022?

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x,y) \; = \; x^2 - 3x - xy + y^2$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.

Vis at h har kun ett stasjonært punkt: $(2,\ 1)$. Klassifiser det stasjonære punktet.

b) Finn minimum for funksjonen h under bibetingelsen: $x + y = 2$.

EKSAMEN 09.12.2021

Universitetet i Sørøst-Norge
Handelshøyskolen

MAT1000 - MATEMATIKK FOR ØKONOMAR

Tid:	4 timar (09:00 - 13:00)
Sidetal:	2
Hjelpemiddel:	Alle (heimeeksamen) Mottak av hjelp, eller samarbeid er ikkje tillatt
Vekting:	Alle delspørsmål tel likt (10 % kvar)
Merknad:	Alle svar skal grunngjevast

NYNORSK

Oppgåve 1

Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

a) Rekn ut funksjonsverdiane til følgjande x-verdiar: $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$.
Vis at $f(x)$ kan skrivast som $f(x) = (x^2-4)(x^2+2)$
Bestem nullpunkta til f og avgjer kor funksjonen er positiv, og kor han er negativ.

b) Bestem $f'(x)$, og avgjer kor funksjonen f er veksande og kor han er avtakande.
Finn lokale ekstrempunkt for f og avgjer om nokon av dei er globale.

c) Bestem $f''(x)$. Avgjer kor grafen til f er konkav, og kor han er konveks og finn vendepunkta til f.
Skisser grafen til f. NB! Handteikna, ikkje utskrift frå matematikkprogram.

d) Rekn ut verdien av det bestemte integralet: $\displaystyle\int_0^2 (-x^4 + 2x^2 + 8)\,dx$
Finn storleiken på arealet som er avgrensa av grafen til f og x-aksen.

Oppgåve 2

a) Funksjonen g er gitt ved at: $$g(x) = \frac{3x+2}{3x-2}$$

For kva x-verdi er ikkje g definert?

Finn skjeringspunkta mellom g og koordinataksane.

Bestem $g'(x)$ og bruk dette til å vise at g ikkje har noko ekstrempunkt.

b) Gitt funksjonen $h(x) = (2x+1)e^{-x^2}$

Vis at $h'(x) = (2-2x-4x^2)e^{-x^2}$ og bruk dette til å finne eventuelle ekstrempunkt for h.

Oppgåve 3

a) Anne har sett inn i banken eit beløp på 25 000 kr til ei rente på 1.5 % årleg.
Kva er verdien av beløpet etter 1 år, 3 år og etter 10 år?
Kor mange år går det før verdien av beløpet er 30 000 kr?

Jonas kjøpte i 2015 ei leilegheit på fjellet til 1 800 000 kr. Etter 5 år selde han leilegheita for 2 200 000 kr. Kva var gjennomsnittleg årleg prosentvis verdiauke på leilegheita i dei 5 åra Jonas eigde ho?

b) Bjarne tok i 2019 opp eit lån på 2 500 000 kr til kjøp av hus. Renta på lånet er 1.7 % årleg, og lånet betalast over 20 år med like store årlege beløp, første gang var eitt år etter låneopptaket. Kva er det årlege beløpet Bjarne betalar på lånet?

Rett etter andre betaling på lånet i 2021 blei renta sett opp til 2.0 % årleg. Det fører til at dei årlege beløpa må aukast viss avtalt betalingsperiode skal ligge fast. Bjarne ønsker i staden å gjere ei ekstra betaling i 2022 slik at det årlege beløpet fra 2023 og utover blir det same som han betalte i 2020 og 2021. Kor mykje må Bjarne betale på lånet i 2022?

Oppgåve 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x,y) = x^2 - 3x - xy + y^2$

a) Finn dei partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.

Vis at h har kun eitt stasjonert punkt: $(2,\ 1)$. Klassifiser det stasjonere punktet.

b) Finn minimum for funksjonen h under bibetingelsen: $x + y = 2$.

Formelsamling til bruk ved eksamen i MAT1000 - Matematikk for økonomer

---

Kvadratsetningene

$$\mathbf{1}:\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad \mathbf{2}:\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad \mathbf{3}:\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Andregradslikningen $\quad ax^2 + bx + c = 0 \quad$ der $\quad a \neq 0$

Løsninger: $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad$ så sant $\quad b^2 - 4ac \geqq 0$

Topunktsformelen $\quad y - y_1 = a(x - x_1) \quad$ der $\quad a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$

a er stigningstallet for linja gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2).

Sirkellikningen $\quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \quad$ sirkel med radius r og sentrum i (a, b)

Potensregning

$$a^0 = 1 \qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Derivasjon

Potensregelen: $\quad f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n\,x^{n-1}, \quad$ uansett n

Derivasjonsregler for funksjonskombinasjoner:

$$\begin{array}{llll}
a) & f = k \cdot u & \Rightarrow & f' = k \cdot u' \quad (k \text{ er en konstant}) \\
b) & f = u + v & \Rightarrow & f' = u' + v' \\
c) & f = u - v & \Rightarrow & f' = u' - v' \\
d) & f = u \cdot v & \Rightarrow & f' = u' \cdot v + u \cdot v' \\
e) & f = \dfrac{u}{v} & \Rightarrow & f' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}
\end{array}$$

Her er f, u og v alle funksjoner av den samme variabelen.

Kjerneregelen: $\quad$ Hvis $\quad y = f(x) = g(u), \quad$ der $\quad u = u(x)$

så er $\quad f'(x) = g'(u) \cdot u'(x) \quad$ evt. $\quad f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Tangentlikning: $\quad y - b = f'(a)(x - a) \quad$ der (a, b) er tangeringspunktet.

Eksponensialfunksjoner

Generelt grunntall $a > 0$: $\quad f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = \ln a \cdot a^x$

Grunntall e: $\quad f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \qquad f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$

Logaritmefunksjoner

Logaritme med grunntall a, der $a > 0$, $a \neq 1$: $\quad y = \log_a x$

Her er y det tallet som a må opphøyes i for å gi x, dvs. $a^y = a^{\log_a x} = x \quad (x > 0)$

Naturlig logaritme: $\quad y = \ln x$ er det tallet som e må opphøyes i for å gi x, dvs.

$$e^y = e^{\ln x} = x \qquad (x > 0)$$

Regneregler for logaritmer:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln(x^p) = p \cdot \ln x \qquad \ln(e^x) = x$$

Derivasjon: $\quad f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \qquad f(x) = \ln u(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$

Integralregning

Ubestemt integral: $\quad \int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad$ der $\quad F'(x) = f(x)$

Regneregler:

$$\int x^n\,dx = \tfrac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C, \quad x > 0$$

$$\int e^{kx}\,dx = \tfrac{1}{k} \cdot e^{kx} + C, \quad k \neq 0$$

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$$

$$\int \Big(f(x) + g(x)\Big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Bestemt integral: $\quad \int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = \Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a)$, der $F'(x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \qquad \text{der} \quad a \leqq c \leqq b$$

Rekker / Finansmatematikk

Summen av en geometrisk rekke (n ledd) når $k \neq 1$:

$$S_n = a + a\,k + a\,k^2 + a\,k^3 + \cdots + a\,k^{n-1} = a \cdot \frac{1 - k^n}{1 - k}$$

Når $|k| < 1$, så har vi at $S_n \xrightarrow{n \to \infty} S = a \cdot \frac{1}{1-k} = \frac{a}{1-k}$

- Sluttverdi av et beløp K_0 etter n perioder når renta r er

  $a)$ pr periode: $K_n = K_0\,(1+r)^n$ $b)$ kontinuerlig: $K_n = K_0\,e^{r \cdot n}$

- Nåverdi av et beløp K_n etter n perioder når renta r er

  $a)$ pr periode: $K_0 = \frac{K_n}{(1+r)^n}$ $b)$ kontinuerlig: $K_0 = \frac{K_n}{e^{r \cdot n}}$

- Oppsparingsannuitet. Fast betaling ved utgangen av hver periode.
  Verdi umiddelbart etter siste betaling.

  $$V = K\,\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

  V = sluttverdi
  K = fast betalt beløp
  r = rente pr. periode
  n = antall perioder

- Nåverdi av annuitet. Fast betaling ved utgangen av hver periode, første betaling ved utgangen av første periode.

  $$K_0 = K\,\frac{(1+r)^n - 1}{r\,(1+r)^n}$$

  K_0 = nåverdi
  K = fast betalt beløp
  r = rente pr. periode
  n = antall perioder

- Betaling av lån (annuitet). Fast betaling ved utgangen av hver periode, første betaling en periode etter låneopptak.

  $$K = K_0\,\frac{r\,(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

  K_0 = lånebeløp
  K = fast betalt beløp
  r = rente pr. periode
  n = antall perioder

Funksjoner av to variabler

Funksjonen $z = f(x,y)$ beskriver en flate i rommet.

Punkt der $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x' = 0$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y' = 0$ kalles *stasjonære punkt.*

Klassifisering av et stasjonært punkt (a,b) :

Vi definerer: $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(a,b)} = f''_{xx}(a,b)$ $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_{(a,b)} = f''_{yx}(a,b)$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(a,b)} = f''_{yy}(a,b)$$

og setter $\Delta = A \cdot C - B^2$

Da gjelder en av følgende muligheter

1. $\Delta > 0$ og $A < 0$ $\Rightarrow$ f har lokalt maksimum i (a,b)
2. $\Delta > 0$ og $A > 0$ $\Rightarrow$ f har lokalt minimum i (a,b)
3. $\Delta < 0$ $\Rightarrow$ f har sadelpunkt i (a,b)
4. $\Delta = 0$ $\Rightarrow$ Ingen avgjørelse for (a,b)

Stigningstallet for tangenten i et punkt på nivåkurven $f(x,y) = c$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{f_x'(x,y)}{f_y'(x,y)}$$

Optimering under bibetingelse ved Lagranges metode

Vi finner maksimum/minimum for $z = f(x,y)$ under bibetingelsen $g(x,y) = c$ ved å sette opp Lagrangefunksjonen:

$$F(x,y) = f(x,y) - \lambda\,(\,g(x,y) - c\,)$$

og så løse følgende likningssystem med hensyn på x, y (og evt. λ):

i) $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0$

ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$

iii) $g(x,y) - c = 0$