EKSAMEN MAT1000 – 10.12.2020

№1 $f(x) = x^3 + 3x^2$ $L: y = x + 3$

a) $x = -1: \; y = f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 = -1 + 3 = \underline{2}$

$x = 2: \; y = f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 = 8 + 12 = \underline{\underline{20}}$

Nullpunkt: $y = 0$ når $f(x) = x^3 + 3x^2 = 0$

dvs. $x^2 \cdot (x+3) = 0 \rightarrow \underline{\underline{x = 0, \text{ eller } x = -3}}$

Fortegnsdrøfting

		-3		0		x
$f(x)$	f negativ	0	f positiv	0	f positiv	
	$x < -3$		$-3 < x < 0$		$x > 0$	

Skjæringspkt mellom f og L: Samme y-verdi

$x = 1: \; y = f(1) = 1 + 3 = \underline{4}$ ok $L: 4 = 1 + 3$ ok

$y = f(x) = L: \; x^3 + 3x^2 = x + 3 \rightarrow x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

$(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+3) = (x^2-1)(x+3) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

$x - 1 = 0, \; x + 1 = 0$, eller $x + 3 = 0 \rightarrow$ Dvs $x = \pm 1, -3$

Tre skj. pkt: $\underline{\underline{(-1, 2), (1, 4) \text{ og } (-3, 0)}}$

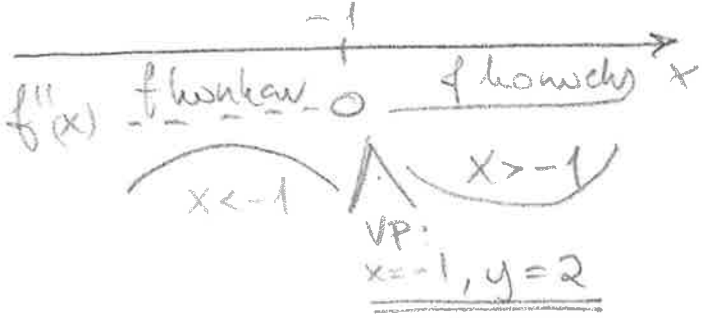
b) $f'(x) = \underline{\underline{3x^2 + 6x}} = 3x(x+2)$

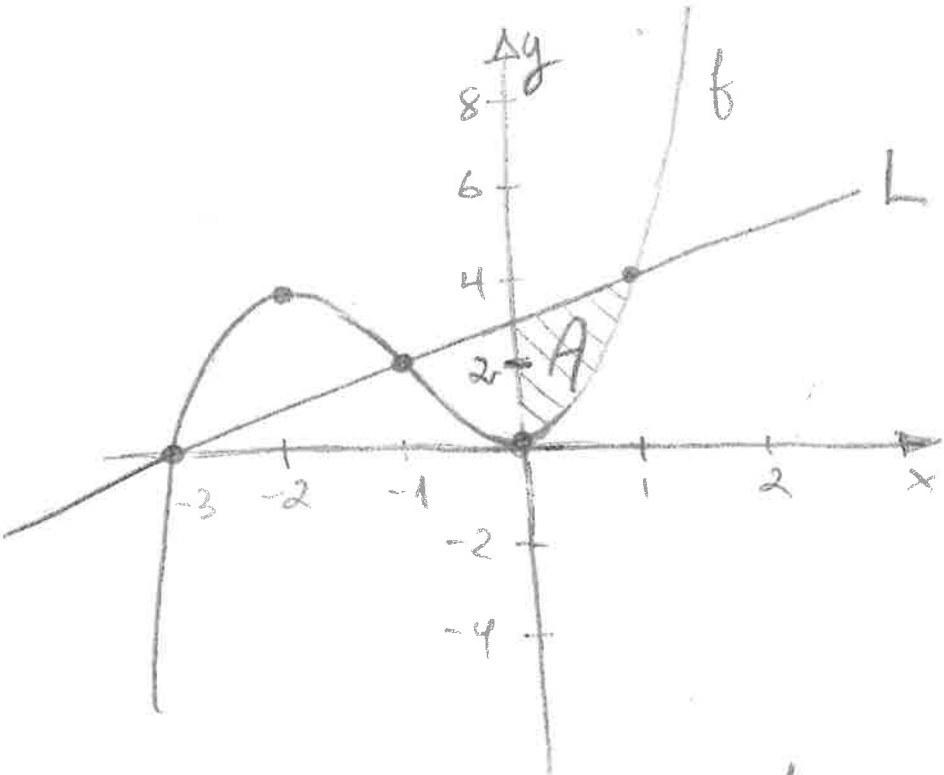
		-2		0		x
$f'(x)$		0	- - - -	0		
	f vokser	lokalt max	f avtar	lokalt min.	f vokser	
	$x < -2$	$x = -2$, $y = 4$	$-2 < x < 0$	$x = 0$, $y = 0$	$x > 0$	

$x = -4: \; y = f(-4) = -16 < 0 \rightarrow$ Ikke globalt min.

Se a) $x = 2: \; y = 20 \rightarrow \underline{\underline{\text{Ikke globalt max.}}}$

1c) $f''(x) = 6x+6 = 6(x+1)$





Areal A avgrensa av f og linja L når $x \geq 0$:

$$A = \int_0^1 L\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx$$

d) $$A = \int_0^1 (x+3)\,dx - \int_0^1 (x^3+3x^2)\,dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2 + 3x\right]_0^1 - \left[\tfrac{1}{4}x^4 + x^3\right]_0^1$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}+3\right) - 0 - \left(\tfrac{1}{4}+1-0\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} + 3 - \tfrac{1}{4} - 1 = 2 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{9}{4} = \underline{\underline{2{,}25}}$$

Nº2 $g(x) = f(x)\cdot e^x = (x^3+3x^2)e^x$

a) NB! $e^x > 0$ så g og f har <u>samme</u> fortegnsskjema med nullpkt. $\underline{\underline{x=-3 \text{ og } x=0}}$.

$$g'(x) = (x^3+3x^2)'e^x + (x^3+3x^2)\cdot(e^x)'$$
$$= (3x^2+6x)e^x + (x^3+3x^2)e^x$$
$$= (3x^2+6x+x^3+3x^2)e^x = (x^3+6x^2+6x)e^x$$
$$= \underline{\underline{x(x^2+6x+6)e^x}}$$

NB! $x^2+6x+6 \stackrel{?}{=} 0$

$x = \dfrac{-6\pm\sqrt{36-24}}{2}$

$x = \dfrac{-6\pm\sqrt{12}}{2} = -3\pm\sqrt{3}$

$x = \begin{cases} -3-\sqrt{3} \approx -4{,}73 \\ -3+\sqrt{3} \approx -1{,}27 \end{cases}$

$$g'(x) \approx x(x+4{,}73)(x+1{,}27)e^x$$

Fortegnsdrøfter $g'(x)$:

$-4{,}73$ $\quad -1{,}27 \quad$ 0 $\quad x$

$g'(x)$ - - - - 0 ——— 0 - - - - 0 ———

g avtar $x<-4{,}73$ | lok. min | g vokser $-4{,}73<x<-1{,}27$ | Lok. max | g avtar $-1{,}27<x<0$ | Lok. min | g vokser $x>0$

$x=-4{,}73$, $y=-0{,}34$ — Også globalt min, ser vi fra grafskissen

$x=-1{,}27$, $y=0{,}78$

$x=0$, $y=0$

b) $\int g(x)\,dx = G(x)$ hvis $G'(x) = g(x)$

$$G'(x) = (x^3 e^x)' = 3x^2 e^x + x^3 e^x = (3x^2+x^3)e^x = \underline{\underline{g(x)}}$$

Arealet A av området avgrenset av grafen til g og x-aksen:

$$A = \int_{-3}^{0} g(x)\,dx = \Big[G(x)\Big]_{-3}^{0} = G(0) - G(-3)$$
$$= 0^3 e^0 - (-3)^3 e^{-3} = 0 + 27e^{-3} = \frac{27}{e^3} \approx \underline{\underline{1{,}34}}$$

№3

a) Marianne: $r = 0{,}03$ p.a., $n = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$, $K_0 = 40000$

Sluttverdi: $K_2 = 40000 \cdot 1{,}03^2 = \underline{\underline{42436}}$, $K_4 = \underline{\underline{45020}}$

Ola's bil: $B_0 = 40000$, $B_n = B_0(1-p)^n$

der $n = 4$, og $p = 0{,}15$ årlig

$$B_4 = 40000 \cdot (1-0{,}15)^4 = 40000 \cdot 0.85^4 = \underline{\underline{20880}}$$

Kari's sparing: $10000(1+r)^2 + 20000(1+r) = 40000 \quad |:10000$

dvs. $(1+r)^2 + 2(1+r) - 4 = 0$ Andregradslikning der $x = 1+r$

$$1+r = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = -1 \pm \sqrt{5} \quad \begin{cases} -1-\sqrt{5} < 0 \text{ uaktuell} \\ -1+\sqrt{5} \text{ ok} \end{cases}$$

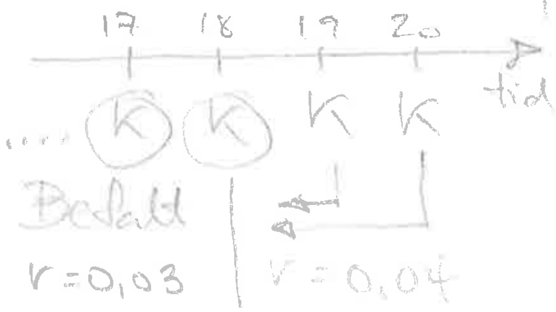
Altså: $r = -1 + \sqrt{5} - 1 = \sqrt{5} - 2 \approx 0{,}2361$

$\underline{\underline{r = 23.61\ \%}}$

b) Lån $K_0 = 3000\,000$, $r = 0{,}03$ p.a., $n = 20$

Årlig betaling: $K = 3000000 \, \dfrac{0{,}03 \cdot 1{,}03^{20}}{1{,}03^{20} - 1} = \underline{\underline{201647{,}12}}$

Renten økes til 4% p.a. etter 18. betaling



Restgjeld etter den 18. betalingen:

$$R = \frac{K}{1{,}03} + \frac{K}{1{,}03^2}$$

$$R = 385\,845.65$$

Låneformel med $K_0 = R$, $n = 2$, $r = 0{,}04$

Nytt årlig beløp:

$$C = 385845{,}65 \cdot \frac{0{,}04 \cdot 1{,}04^2}{1{,}04^2 - 1} = \underline{\underline{204\,573.85}}$$

№5 $h(x,y) = 1 + 4x + 4y - x^2 y$

a) Partielle deriverte av

1. orden: $\dfrac{\partial h}{\partial x} = 4 - 2xy$ $\qquad \dfrac{\partial h}{\partial y} = 4 - x^2$

2. orden: $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} \overset{A}{=} -2y$ $\qquad \dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = -2x$

$\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = -2x$ $\quad \overset{B}{=\!=} \quad$ $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} \overset{C}{=} 0$

Stasjonære pkt. ?

$4 - 2xy = 0$ og $4 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 2$

$$\begin{cases} x = -2: & 4 + 4y = 0 \rightarrow 4y = -4 \rightarrow y = -1 \\ x = 2: & 4 - 4y = 0 \rightarrow 4 = 4y \rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Altså 2 st. pkt: $\underline{(-2,-1) \text{ og } (2,1)}$

NB! $C = 0 \rightarrow A \cdot C = 0 \rightarrow \Delta = AC - B^2 = 0 - B^2 = -B^2 < 0$

Begge st. pkt. er $\underline{\underline{\text{sadelpkt}}}$ $\quad (-B^2 = -(\pm 4)^2 = -16)$

b) Bibetingelse $y = x - 1$; $x \geq 0$

$Z = h(x, x-1) = 1 + 4x + 4(x-1) - x^2(x-1)$

$Z = 1 + 4x + 4x - 4 - x^3 + x^2 = -x^3 + x^2 + 8x - 3 = g(x)$

Søker max for h via max for g:

$g'(x) = -3x^2 + 2x + 8 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{-6} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{4}{3} \end{cases}$

$x \geq 0$

$x = 2$

$y = 2 - 1 = 1$

Altså, max for h under bibetingelsen:

$Z = h(2,1) = 1 + 8 + 4 - 4 \cdot 1 = \underline{\underline{9}}$