

MAT1000 Matematikk for økonomer

EKSAMEN 02.12.2019

Løsningsforslag til oppgave 4

Universitetet i Sørøst-Norge
Handelshøyskolen

Roy M. Istad

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x,y) = -3x^2 + 4x + 2xy - y^2$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.

Partielle deriverte av 1. orden: $\frac{\partial h}{\partial x} = -6x + 4 + 2y$ og $\frac{\partial h}{\partial y} = 2x - 2y$

2. orden: $\underbrace{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -6}_{A}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = 2 \underset{B}{=} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 2$, $\underbrace{\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -2}_{C}$

Vis at h har kun det ene stasjonære punktet $(1,\ 1)$ og klassifiser dette punktet.

$\frac{\partial h}{\partial x} = -6x + 4 + 2y = 0 \longrightarrow -6y + 4 + 2y = 0 \rightarrow -4y = -4 \rightarrow y = 1$

og

$\frac{\partial h}{\partial y} = 2x - 2y = 0 \rightarrow 2x = 2y \rightarrow x = y$

Innsatt i: $x = y$

gir altså: $x = 1$

dvs. kun ett st.pkt: $(1,1)$

Klassifisering av det stasjonære punktet:

St.pkt	A	C	B	$\Delta = AC - B^2$	Type
$(1,1)$	-6	-2	2	$-6 \cdot (-2) - 2^2 = 12 - 4 = 8 > 0$ og $A = -6 < 0$	Lokalt maksimumspunkt

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x,y) = -3x^2 + 4x + 2xy - y^2$

b) Vis at funksjonen h kan skrives som: $h(x,y) = 2 - 2(x-1)^2 - (y-x)^2$.

$$2 - 2(x-1)^2 - (y-x)^2 = 2 - 2(x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 2xy + x^2)$$
$$= 2 - 2x^2 + 4x - 2 - y^2 + 2xy - x^2 = -3x^2 + 4x + 2xy - y^2 = h(x,y)$$ **Ok!**

Grunngi at h har et globalt maksimum og bestem dette maksimumspunktet.

Vi bruker omskrivingen av h: $z = h(x,y) = 2 - 2\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} - \underbrace{(y-x)^2}_{\geq 0}$

Obs! Kvadratiske ledd er enten 0, eller positive:

Alle funksjonsverdier er da av typen: $z = h(x,y) = 2 - 2 \cdot tall_1 - tall_2$, dvs. $z < 2$

og unntaket er akkurat for 0: $z = h(x,y) = 2 - 2 \cdot 0 - 0$, dvs. $z = 2$

Maksimumsverdien $z = 2$ inntreffer altså når: $x - 1 = 0$ og $y - x = 0$

dvs. $x = 1$ og $y = x = 1$

Altså, globalt maksimum: $\underline{\underline{z = h(1,1) = 2}}$

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x,y) = -3x^2 + 4x + 2xy - y^2$

Finn maksimum for funksjonen h under bibetingelsen: $x - y = 1$.

Bibetingelsen $x - y = 1$ kan enten omskrives til: $x = 1 + y$, eller: $x - 1 = y$.
Den siste formen $y = x - 1$ er enklest å bruke her, siden det er kun to y-ledd i h:

$$z = h(x, x-1) = -3x^2 + 4x + 2x(x-1) - (x-1)^2$$
$$= -3x^2 + 4x + 2x^2 - 2x - x^2 + 2x - 1 = -2x^2 + 4x - 1 = g(x)$$

Maksimum? Sjekk $g'(x)$: $g'(x) = -4x + 4 = -4(x-1) = 0$, dvs. $\underline{x = 1}$

$g''(x) = -4 < 0$, dvs. g er konkav og har <u>maksimum</u>!

$z = g(1) = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1 = 1$

Husk å sette inn at $x = 1$ i bibetingelsen: $y = x - 1 = 1 - 1 = 0$, dvs. $\underline{y = 0}$

Konklusjon: Maksimum for h under den gitte bibetingelsen: $\underline{\underline{z = h(1,0) = 1}}$

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x,y) = -3x^2 + 4x + 2xy - y^2$

Finn maksimum for funksjonen h under bibetingelsen: $x - y = 1$.

Bibetingelsen $x - y = 1$ kan enten omskrives til: $x = 1 + y$, eller: $x - 1 = y$

Alternativ: Bruker den første formen $x = 1 + y$ i omskrevet versjon av h.

$z = h(x\,,y) = 2 - 2(x-1)^2 - (y-x)^2$ Sett inn i h at: $x = 1 + y$

$z = h(1+y\,,y) = 2 - 2(1+y-1)^2 - (y-(1+y))^2 = 2 - 2y^2 - (-1)^2$
$= 2 - 2y^2 - 1 = 1 - 2y^2$

NB! Alle z-verdier er av typen: $1 -$ *0* eller en *positiv verdi*, dvs. alle: $z \leq 1$

Vi ser at det er $y = 0$ som gir maksimum $z = 1$, og når $y = 0$, så er $x = 1$

Samme konklusjon nå (selvsagt):
Maksimum for h under den gitte bibetingelsen: $\underline{\underline{z = h(1,0) = 1}}$

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x,y) = -3x^2 + 4x + 2xy - y^2$

Finn maksimum for funksjonen h under bibetingelsen: $x - y = 1$.

Alternativ: Lagranges multiplikatormetode

$F(x\,,y) = h(x,y) - \lambda(x - y - 1)$ Her er: $g(x,y) - c = x - y - 1$

Løser likningsssystemet:

I) $\frac{\partial F}{\partial x} = -6x + 4 + 2y - \lambda \cdot 1 = 0$ $\lambda = -6x + 4 + 2y$

II) $\frac{\partial F}{\partial y} = 2x - 2y - \lambda \cdot (-1) = 0 \longrightarrow 2x - 2y + (-6x + 4 + 2y) = 0$
$2x - 2y - 6x + 4 + 2y = 0$
$-4x + 4 = 0 \longrightarrow x = 1$

III) $x - y - 1 = 0$
$1 - y - 1 = 0$
dvs. $y = 0$

Samme konklusjon nå igjen (selvsagt):
Maksimum for h under den gitte bibetingelsen: $\underline{\underline{z = h(1,0) = 1}}$