MAT1000 Matematikk for økonomer

EKSAMEN 02.12.2019

Løsningsforslag til oppgave 2

Universitetet i Sørøst-Norge
Handelshøyskolen

Roy M. Istad

Oppgave 2

a) Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = (3 - x)e^x$

Vis utregning av funksjonsverdiene for både $x = -1$, $x = ln2$ og $x = 2$.

Regner ut y-verdier detaljert:

$$y = f(-1) = (3-(-1))\,e^{(-1)} = (3+1)e^{-1} = 4e^{-1} = \frac{4}{e} \approx \underline{\underline{1.47}}$$

$$y = f(ln2) = (3 - ln2)e^{ln2} = (3 - ln2)\cdot 2 = 6 - 2ln2 \approx \underline{\underline{4.61}}$$

$$y = f(2) = (3-2)e^2 = 1\cdot e^2 = e^2 \approx \underline{\underline{7.39}}$$

$\boxed{NB!\ e^{lnx} = x}$

Vis utregning av skjæringspunktene mellom grafen til f og de to koordinataksene.

Skjæring med y-aksen, dvs. $x = 0$: $y = f(0) = (3-0)e^0 = 3\cdot 1 = 3,\quad dvs.\ \underline{\underline{(0,3)}}$

Skjæring med x-aksen, dvs. $y = 0$: $y = (3-x)e^x = 0,\quad da\ må:\quad 3 - x = 0$

$altså:\ x = 3,\ dvs.\ \underline{\underline{(3,0)}}$

Oppgave 2

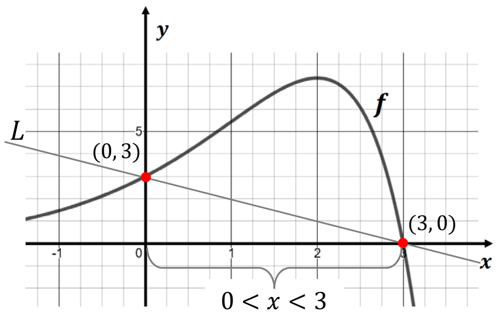
a) Funksjonen f er gitt ved at: $\quad f(x) = (3-x)e^x$

Bestem likningen for den rette linjen L som går gjennom disse to skjæringspunktene og merk av linjen L i grafskissen på svararket.

To skjæringspkt.: $(0,3)$ og $(3,0)$ Bruk topunktsformelen: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

Her: $y - 3 = \frac{0-3}{3-0}(x-0)$, dvs. $y - 3 = -1 \cdot x$, og vi har fått $\underline{\underline{L:\ y = -x + 3}}$

Les av løsningen til ulikheten $f(x) > 3 - x$ fra grafskissen på svararket og kontroller løsningen ved utregning.



Vi leser av at grafen til f ligger over (er høyere enn) linja L når: $0 < x < 3$
dvs. mellom de to skjæringspunktene

Oppgave 2

a) Les av løsningen til ulikheten $f(x) > 3 - x$ fra grafskissen på svararket og kontroller løsningen ved utregning.

Ulikhet: $f(x) > 3 - x$, dvs. $(3-x)\,e^x > 3 - x$ | flytter alle ledd til venstre side

$$(3-x)\cdot e^x - (3-x)\cdot 1 > 0$$ | $(3-x)$ er felles faktor

$$(3-x)(e^x - 1) > 0$$

Fortegnsskjema:

		0		3		x
$(3-x)$	———		———	0	- - -	
$(e^x - 1)$	- - -	0	———		———	
$(3-x)(e^x-1)$	- - -	0	———	0	- - -	

positivt produkt, dvs. produkt > 0

$\underline{\underline{\text{Løsning: } 0 < x < 3}}$

Oppgave 2

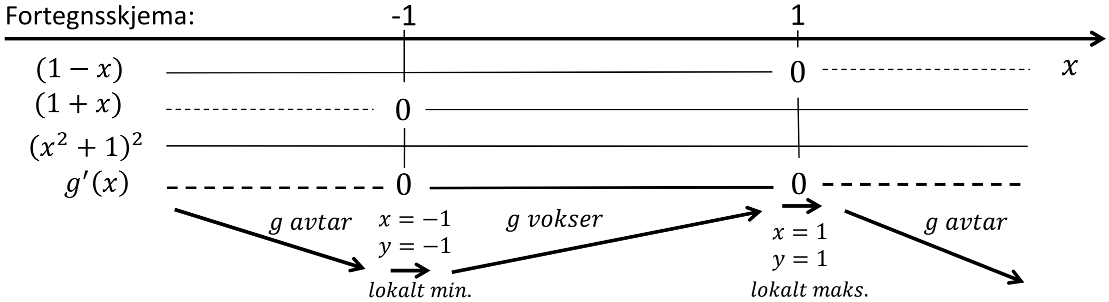
b) Funksjonen g er gitt ved at: $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

Bestem $g'(x)$ og finn eventuelle ekstrempunkt for g.

$$g'(x) = \frac{(2x)' \cdot (x^2+1) - 2x \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2 \cdot (x^2+1) - 2x \cdot (2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2 \cdot (1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \underline{\underline{\frac{2(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}}}$$

Fortegnsskjema:



Oppgave 2

b) Funksjonen g er gitt ved at: $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

Bestem $g'(x)$ og finn eventuelle ekstrempunkt for g.

Merk deg gjerne
at $y < 0$ når $x < 0$
at $y = 0$ når $x = 0$
og at $y > 0$ når $x > 0$

$$x \to \pm\infty: \quad y = g(x) \to \frac{2x}{x^2} \to \frac{2}{x} \to 0$$

Altså, y-verdiene nærmer seg 0 og det er ingen konkurranse med de de lokale ekstrempunktene, som begge dermed er globale ekstrempunkt. Dvs. <u>globalt min. i (-1, -1) og globalt maks. i (1, 1)</u>

Deriver funksjonen $G(x) = 2 + ln(x^2+1)$

$$G'(x) = 0 + \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1} = \underline{\underline{g(x)}}$$

Formelsamlingen:
$f(x) = \ln u(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$

og bruk dette til å beregne: $\int_0^1 g(x)\,dx$

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \left[\, G(x) \,\right]_0^1 = \left(2 + ln(1^2+1)\right) - \left(2 + ln(0^2+1)\right)$$

$$= 2 + ln2 - 2 - \underbrace{ln1}_{=0} = \underline{\underline{ln2}}$$