MAT1000 Matematikk for økonomer

EKSAMEN 02.12.2019

Løsningsforslag til oppgave 1

Universitetet i Sørøst-Norge
Handelshøyskolen

Roy M. Istad

Oppgave 1

En funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 6x + 8$

a) Vis utregning av funksjonsverdiene for både $x = -5$ og $x = 3$.

Funksjonsverditabell:

x	-5	-3	0	1	3
y	28	-10	8	10	-28

Lest av svararket for: x = -3, 0 ,1

Regner ut y-verdi detaljert: Ser på $x = -5$

$$y = f(-5) = -(-5)^3 - 3(-5)^2 + 6(-5) + 8$$
$$= -(-125) - 3 \cdot 25 - 30 + 8 = 125 - 75 - 22 = \underline{\underline{28}}$$

Gjør det samme med $x = 3$ for å få $y = -28$

Vis at funksjonen også kan skrives som: $f(x) = (x + 4)(x + 1)(2 - x)$

Multipliser ut parentesene:

$$(x+4)(x+1)(2-x)$$
$$= (x^2 + 5x + 4)(2 - x)$$
$$= 2x^2 + 10x + 8 \quad -x^3 - 5x^2 - 4x$$
$$= -x^3 - 3x^2 + 6x + 8 = f(x)$$ **Ok!**

Bruk dette til å beregne nullpunktene for f

Søker x slik at: $y = f(x) = 0$

Løsning? Produkt = 0 → Faktorisering av $f(x)$

Dvs. $f(x) = 0$ *når* $(x+4)(x+1)(2-x) = 0$

$x + 4 = 0$, $x + 1 = 0$, eller $2 - x = 0$

Altså når: $\underline{\underline{x = -4}}$, $\underline{\underline{x = -1}}$, eller $\underline{\underline{x = 2}}$

Oppgave 1

En funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 6x + 8$

b) Bestem $f'(x)$. $f'(x) = -3 \cdot x^{3-1} - 3(2 \cdot x^{2-1}) + 6 \cdot 1 + 0 = \underline{\underline{-3x^2 - 6x + 6}}$

og løs likningen: $f'(x) = 0$: $-3x^2 - 6x + 6 = 0 \quad | : -3$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

Bruker andregradsformelen: $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{12}}{2}$

Obs! $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

$x = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$, dvs. $\underline{\underline{\begin{cases} x \approx -2.73 \\ x \approx 0.73 \end{cases}}}$

Les av fra grafskissen (uten utregning) hvor funksjonen f er voksende og hvor den er avtagende.

Ser at: f *er avtagende* når $x < -2.73$, eller når $x > 0.73$

f *er voksende* når $-2.73 < x < 0.73$

NB! Kontroll av at avlesningen er korrekt, gjøre ved å drøfte $f'(x)$ i et fortegnsskjema. Se neste side.

Oppgave 1

En funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 6x + 8$

b) Merk av lokale ekstrempunkt på grafskissen for f og avgjør om noen av dem er globale.

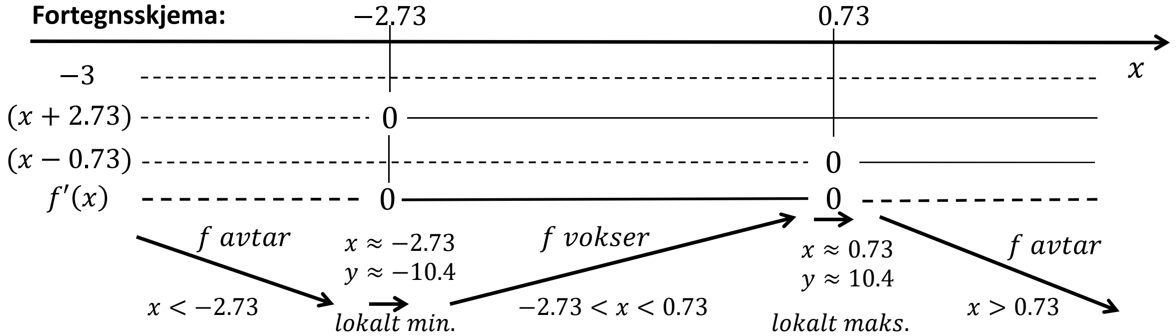
Leser av grafen et lokalt minimum (bunnpunkt) i første løsning av likningen $f'(x) = 0$:

$\underline{\underline{x \approx -2.73 \text{ og } y \approx -10.5}}$, og lokalt maksimum (toppunkt) i andre: $\underline{\underline{x \approx 0.73 \text{ og } y \approx 10.5}}$

Vi kontrollerer (frivillig!) at avlesningene er korrekt ved å drøfte $f'(x)$ i et fortegnsskjema.

Bruker løsningene av $f'(x) = 0$ til å faktorisere: $f'(x) \approx -3(x + 2.73)(x - 0.73)$

Fortegnsskjema:



Oppgave 1

En funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 6x + 8$

b) Merk av lokale ekstrempunkt på grafskissen for f og avgjør om noen av dem er globale.

Globale ekstrempunkt?

Obs! Avlest: $y \approx 10.5$, beregnet: $y \approx 10.4$

Kun to aktuelle punkt: $x \approx -2.73,\ y \approx -10.4$ og $x \approx 0.73,\ y \approx 10.4$

Fra grafskissa kan vi se at det er punkt på grafen til f som har større y-verdier enn 10.5, og at det er andre punkt som har mindre y-verdier enn -10.5. Altså: Kun lokale ekstrempunkt.

Vi ser også i funksjonsverditabellen fra a) at de to første y-verdiene som vi fant sier det samme: $f(-5) = 28 > 10.5$ og $f(3) = -28 < -10.5$. Altså, ingen globale ekstrempunkt.

c) Bestem $f''(x)$.

$$f'(x) = -3x^2 - 6x + 6 \quad \rightarrow \quad f''(x) = -3 \cdot (2x^{2-1}) - 6 \cdot 1 + 0 = \underline{\underline{-6x - 6}}$$

Faktorisering: $f''(x) = -6(x+1)$

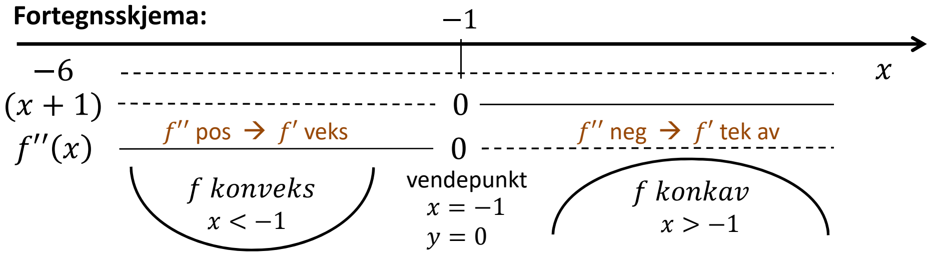
Oppgave 1

En funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 6x + 8$

c) Bestem $f''(x)$. Gjør rede for (ved utregning) hvordan grafen til f krummer, og vis at det eneste vendepunktet er når $x = -1$.

Vi fant at: $f''(x) = -6(x+1)$

Fortegnsskjema:



Vis at tangenten i vendepunktet for f er gitt som $y = 9x + 9$.

Tangenten er ei rett linje, dvs.: $y = \boldsymbol{s}x + \boldsymbol{m}$

der: $\boldsymbol{s} = f'(-1) = -3(-1)^2 - 6(-1) + 6 = -3 + 6 + 6 = 9$, og da er: $y = 9x + \boldsymbol{m}$

Vendepunkt: $(x,\ y) = (-1, 0)$

Setter vendepunktskoordinatene i likningen $y = 9x + \boldsymbol{m}$ og får at: $0 = 9 \cdot (-1) + \boldsymbol{m}$ og: $\boldsymbol{m} = 9$

Da ha vi vist at: $\underline{\underline{y = 9x + 9}}$ **Ok!**

Oppgave 1

En funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 6x + 8$

d) Beregn verdien: $A = \int_0^1 (-x^3 - 3x^2 + 6x + 8)\,dx - \int_0^1 5\,dx$

$$\int_0^1 (-x^3 - 3x^2 + 6x + 8)\,dx = \left[-\tfrac{1}{4}x^4 - x^3 + 3x^2 + 8x\right]_0^1$$

Får 0 på alle ledd

$$= \left(-\tfrac{1}{4}\cdot 1^4 - 1^3 + 3\cdot 1^2 + 8\cdot 1\right) - (0)$$

$$= -\frac{1}{4} - 1 + 3 + 8 = 10 - \frac{1}{4} = \frac{39}{4} = 9.75$$

$$\int_0^1 5\,dx = [\,5x\,]_0^1 = (5\cdot 1) - (5\cdot 0) = 5$$

$$A = \frac{39}{4} - 5 = \frac{39-20}{4} = \underline{\underline{\frac{19}{4} = 4.75}}$$

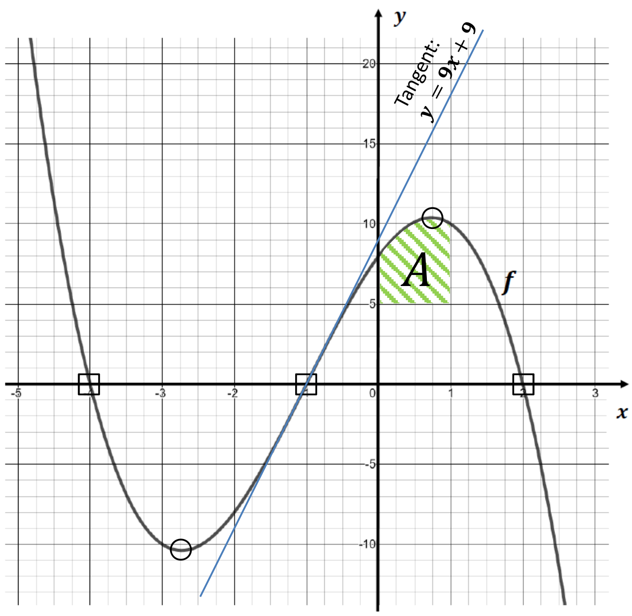
Merk av det området på grafskissen som A kan sies å angi størrelsen på.

- Se grafskissen på neste side.

Oppgave 1

En funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 6x + 8$

d)



☐ Nullpunkt:

$x = -4,\ x = -1,$ eller $x = 2$

○ Lokale ekstrempunkt:

$x \approx -2.73,\ y \approx -10.5$

og $x \approx 0.73,\ y \approx 10.5$