MAT1000 Matematikk for økonomer

EKSAMEN 03.12.2018

Løsningsforslag til oppgave 4

Universitetet i Sørøst-Norge
Handelshøyskolen

Roy M. Istad

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x,y) = xy^2 - xy - y + 1$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.

Partielle deriverte av 1. orden: $\frac{\partial h}{\partial x} = y^2 - y$ og $\frac{\partial h}{\partial y} = 2xy - x - 1$

2. orden: $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \underset{A}{0}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = 2y - 1 \underset{B}{=} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 2y - 1$, $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \underset{C}{=} 2x$

Vis at funksjonen h har to stasjonære punkt: $(-1,\ 0)$ og $(1,\ 1)$.

$\frac{\partial h}{\partial x} = y^2 - y = 0 \quad \rightarrow \quad y(y-1) = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0$, eller $y = 1$

og

$\frac{\partial h}{\partial y} = 2xy - x - 1 = 0$

$y = 0$: $-x - 1 = 0 \rightarrow x = -1$, dvs. $(-1, 0)$

$y = 1$: $2x - x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$, dvs. $\underline{\underline{(1,1)}}$

Klassifiser de stasjonære punktene.

St.pkt	A	C	B	$\Delta = AC - B^2$	Type
$(-1,0)$	0	-2	-1	-1	Sadelpunkt
$(1,1)$	0	2	1	-1	$\underline{\underline{\text{Sadelpunkt}}}$

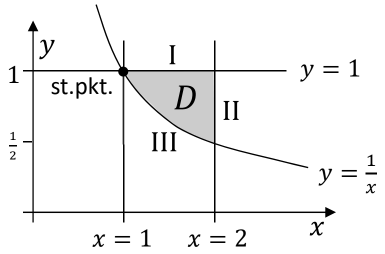
Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x, y) = xy^2 - xy - y + 1$

b) Vis at funksjonen h kan skrives som: $h(x, y) = (xy - 1)(y - 1)$.

$(xy - 1)(y - 1) = xy \cdot y + xy \cdot (-1) - 1 \cdot y - 1 \cdot (-1) = xy^2 - xy - y + 1 = h(x, y)$ Ok!

Skisser området D i xy-planet der: $D = \{ (x, y) \mid 1 \leqq x \leqq 2, \ \frac{1}{x} \leqq y \leqq 1 \}$



Det er ingen st.pkt. inne i D

Obs! $z = h(x, y) = (xy - 1) \cdot (y - 1) = 0$

$xy - 1 = 0$, eller $y - 1 = 0$

$y = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $y = 1$

Dvs. $z = 0$ både på randkurve I og III

Da er det nok å undersøke hva som skjer over randkurve II: $x = 2$; $\frac{1}{2} < y < 1$

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x, y) = xy^2 - xy - y + 1$

Finn minimum for funksjonen h over området D.

Tre randkurver, men siden $z = 0$ både på randkurve I og III, er det nok å undersøke over randkurve II: $x = 2$; $\frac{1}{2} < y < 1$

$$z = h(2, y) = 2y^2 - 2y - y + 1 = 2y^2 - 3y + 1 = g(y)$$

Minimum? Sjekk $g'(y)$

$$g'(y) = 4y - 3 = 4(y - \tfrac{3}{4}) = 0, \text{ dvs. } y = \tfrac{3}{4}$$

$g''(y) = 4 > 0$, dvs. g er konveks og har minimum

$$g(\tfrac{3}{4}) = 2(\tfrac{3}{4})^2 - 3(\tfrac{3}{4}) + 1 = -\tfrac{1}{8}$$

Konklusjon - Minimum for h over D: $\underline{\underline{z = h(2, \tfrac{3}{4}) = -\tfrac{1}{8}}}$