MAT1000 Matematikk for økonomer

EKSAMEN 03.12.2018

Løsningsforslag til oppgave 2

Universitetet i Sørøst-Norge
Handelshøyskolen

Roy M. Istad

Oppgave 2

a) Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = (3 - x^2)e^{-x}$

Vis utregning av funksjonsverdiene til x-verdiene: -1, 0 og 3.

$$y = f(-1) = (3-(-1)^2)\,e^{-(-1)} = (3-1)e^1 = 2e^1 \approx \underline{\underline{5.44}}$$
$$y = f(0) = (3-0^2)e^{-0} = 3e^0 = \underline{\underline{3}} \quad NB!\ e^0 = 1$$
$$y = f(3) = (3-3^2)e^{-3} = (3-9)\,e^{-3} = -6e^{-3} \approx \underline{\underline{-0.30}}$$

Bestem $f'(x)$ og bruk denne til å finne ekstrempunktene for funksjonen.

$$f'(x) = (3-x^2)' \cdot e^{-x} + (3-x^2)\cdot(e^{-x})' = -2x\cdot e^{-x} + (3-x^2)\cdot e^{-x}\cdot(-1)$$
$$= (-2x - 3 + x^2)\cdot e^{-x} = \underline{\underline{(x^2-2x-3)\,e^{-x}}} = (x+1)(x-3)\cdot e^{-x}$$

Faktorisering av (x^2-2x-3)? Løs: $x^2-2x-3=0$ Dvs. $x = \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}$

og $x = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}$

$x = \frac{2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{2\pm4}{2}$

To løsninger: $x=-1$, $x=3$; dvs. $x^2-2x-3 = (x-(-1))(x-3)$
$= (x+1)(x-3)$

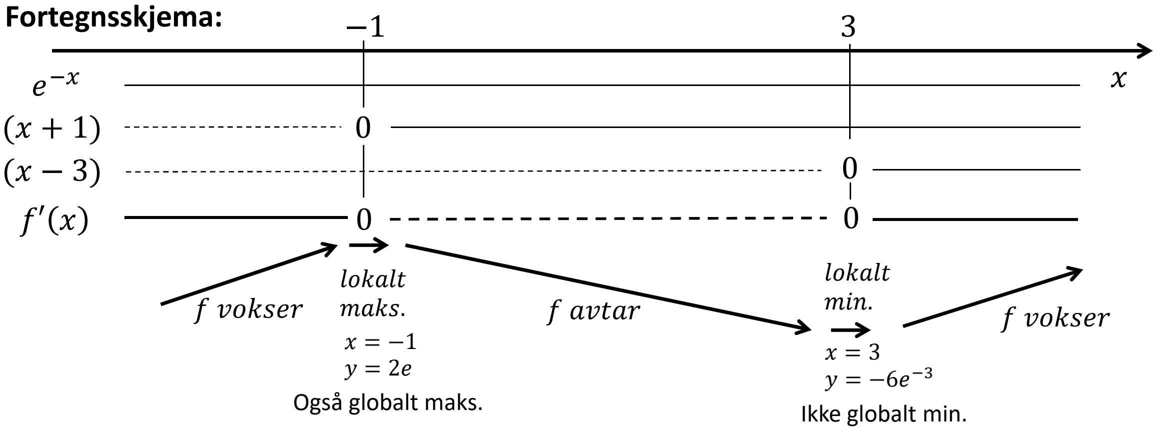
Oppgave 2

a) Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = (3 - x^2)e^{-x}$

Bestem $f'(x)$ og bruk denne til å finne ekstrempunktene for funksjonen.

Faktorisert: $f'(x) = (x+1)(x-3)\,e^{-x}$

Fortegnsskjema:



Oppgave 2

a) Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = -x^2 \cdot e^{-x}$

Bestem $f'(x)$ og bruk denne til å finne ekstrempunktene for funksjonen.

Kun lokale, eller globale ekstrempunkt?

$$x \to -\infty: \quad y = f(x) \to -x^2e^{-x} \to -\overbrace{(-\infty)^2}^{\infty} \cdot e^{-(-\infty)} \to -\infty \cdot e^{\infty} \to -\infty$$

Altså, ingen minste y -verdi og f har da <u>ikke</u> noe globalt minimum

Dvs. $x = 3$ er kun *lokalt* minimum.

$$x \to +\infty: \quad y = f(x) \to -x^2e^{-x} \to -(\infty)^2 \cdot e^{-\infty} \to -\infty \cdot e^{-\infty} \to 0^{\div}$$

$$-\infty \cdot \frac{1}{e^{\infty}}$$

Altså, y –verdiene nærmer seg 0 «nedenfra», de er litt negative.

Da har f et globalt maksimum i $x = -1$ (største positive y-verdi)

Alternativ: Beregn $y = f(-2) < f(3)$, altså ikke globalt minimum.

Observer at alle y-verdier er negative både når $x < -\sqrt{3}$ og når $x > \sqrt{3}$

og da må det være globalt maksimum i $x = -1$ (største positive y-verdi)

Oppgave 2

b) Funksjonen g er gitt ved at: $g(x) = x - 2\sqrt{x}$

NB! D_g: Alle $x \geq 0$

Bestem skjæringspunktene mellom grafen til g og de to koordinataksene.

Skjæringspkt. med y-aksen (sett $x = 0$): $y = g(0) = 0 - 2\sqrt{0} = 0 \rightarrow \underline{\underline{y = 0}}$

Skjæringspkt. med x-aksen (sett $y = 0$): $y = g(x) = x - 2\sqrt{x} = 0$

$x - 2\sqrt{x} = 0 \rightarrow \sqrt{x}\cdot\sqrt{x} - \sqrt{x}\cdot 2 = 0 \rightarrow \sqrt{x}\cdot(\sqrt{x} - 2) = 0$

Altså når $\underline{\underline{x = 0}}$ eller når $\sqrt{x} = 2$

dvs. $\underline{\underline{x = 4}}$

Avgjør om g har noen ekstrempunkt.

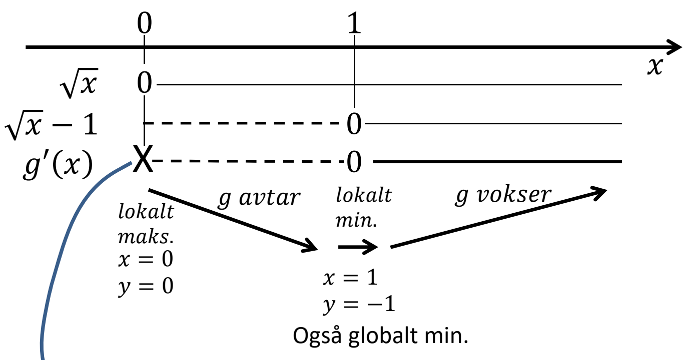
$$g'(x) = 1 - 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \quad \text{NB! } x > 0$$

$g'(x) = 0$ når: $\sqrt{x} - 1 = 0$, dvs. $x = 1$. NB! Pass på endepunktet: $x = 0$

Oppgave 2

b) Funksjonen g er gitt ved at: $g(x) = x - 2\sqrt{x}$ D_g: Alle $x \geq 0$

Avgjør om g har noen ekstrempunkt.



X: $g'(x)$ eksisterer ikke når $x = 0$, men
$y = g(0) = 0$

$x \rightarrow +\infty$:
$y = g(x) = x - \sqrt{x} \rightarrow x$
dvs. $y \rightarrow +\infty$ og da har ikke g noe globalt maks.

Altså,
g har lokalt maks. når $x = 0$
g har globalt min. når $x = 1$