MAT1000 Matematikk for økonomer

EKSAMEN 03.12.2018

Løsningsforslag til oppgave 1

Universitetet i Sørøst-Norge
Handelshøyskolen

Roy M. Istad

Oppgave 1

En funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

a) Regn ut funksjonsverdiene til følgende x-verdier: $-3,\ -1,\ 0,\ 1,\ 3.$

Funksjonsverditabell:

x	-3	-1	0	1	3
y	25	9	16	9	25

Resten er beregnet på samme måte.

Regner ut y-verdi detaljert: Ser på $x = -3$

$$y = f(-3) = (-3)^4 - 8(-3)^2 + 16$$
$$= 81 - 8 \cdot 9 + 16 = 81 - 72 + 16 = \underline{\underline{25}}$$

Vis at funksjonen også kan skrives som: $f(x) = (x^2 - 4)^2$

Enten bruk 2.KVS direkte, eller multipliser ut:

$$(x^2-4)^2 = (x^2-4)(x^2-4)$$
$$= x^2 \cdot x^2 + x^2 \cdot (-4) - 4 \cdot x^2 - 4 \cdot (-4)$$
$$= x^4 - 4x^2 - 4x^2 + 16$$
$$= x^4 - 8x^2 + 16 = f(x) \quad \textbf{Ok!}$$

Finn nullpunktene til f.

Søker x slik at: $y = f(x) = 0$

Løsning? Produkt = 0 → Faktorisering av $f(x)$

Dvs. $f(x) = 0$ *når* $(x^2 - 4)^2 = 0$

$$(x^2-4)^2 = (x^2-4) \cdot (x^2-4)$$
$$= (x-2)(x+2) \cdot (x-2)(x+2)$$
$$= (x+2)^2 \cdot (x-2)^2$$

altså *når* $\underline{\underline{x = -2}}$ eller *når* $\underline{\underline{x = 2}}$

Oppgave 1

En funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

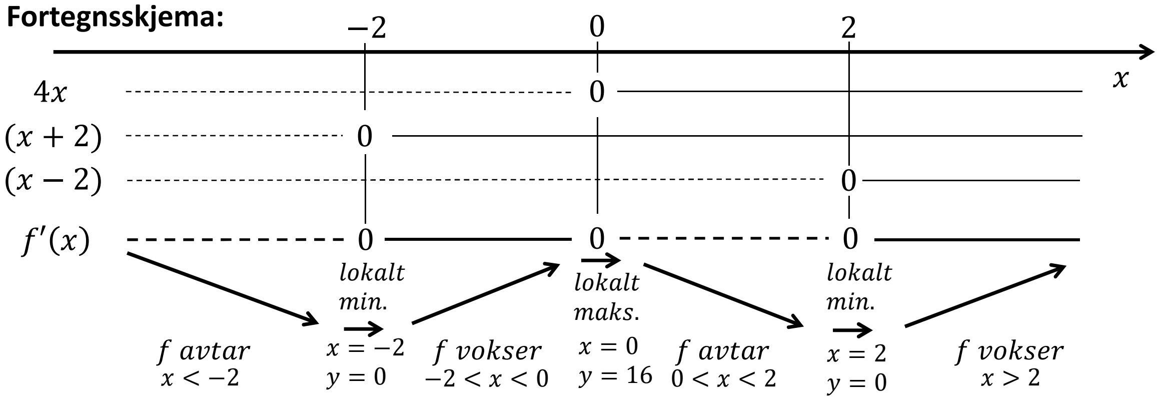
b) Bestem $f'(x)$. $f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} - 8(2 \cdot x^{2-1}) + 0 = \underline{\underline{4x^3 - 16x}}$

Avgjør hvor funksjonen f er voksende og hvor den er avtagende.

Faktorisering:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x\,(x^2 - 4) = 4x(x^2 - 2^2) \overset{\text{3.KVS}}{=} 4x(x+2)(x-2)$$

Fortegnsskjema:



Oppgave 1

En funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

b) Finn lokale ekstrempunkt for f og avgjør om noen av dem er globale.

1) Lokalt minimum når: x = -2, eller x = 2

Fra pkt. a) Alle $y = f(x) = (x^2 - 4)^2 \geq 0$

$y \geq 0$, dvs. alle y-verdier er positive, eller 0

Da må disse også gi $\underline{\underline{\text{globalt minimum}}}$ for f: $\begin{cases} x = -2\,,\ y = 0 \\ x = 2\,,\ y = 0 \end{cases}$

2) Lokalt maksimum i punktet: x = 0, y = 16

$x \to \pm\infty$: $y = f(x) \to x^4 \to (\pm\infty)^4$, $dvs.$ $y \to +\infty$

Altså, y -verdiene kan bli vilkårlig store og f har da <u>ikke</u> noe globalt maksimum

Alternativ: Fra tabellen i pkt a) ser vi at y -verdiene for $x = \pm 3$ er lik 25, og da større enn 16! Altså har $\underline{\underline{\text{ikke}}}$ f noe $\underline{\underline{\text{globalt maksimum}}}$ (i det eneste kandidatpunktet).

Oppgave 1

En funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

c) Bestem $f''(x)$. Gjør rede for hvordan grafen til f krummer og finn vendepunktene.

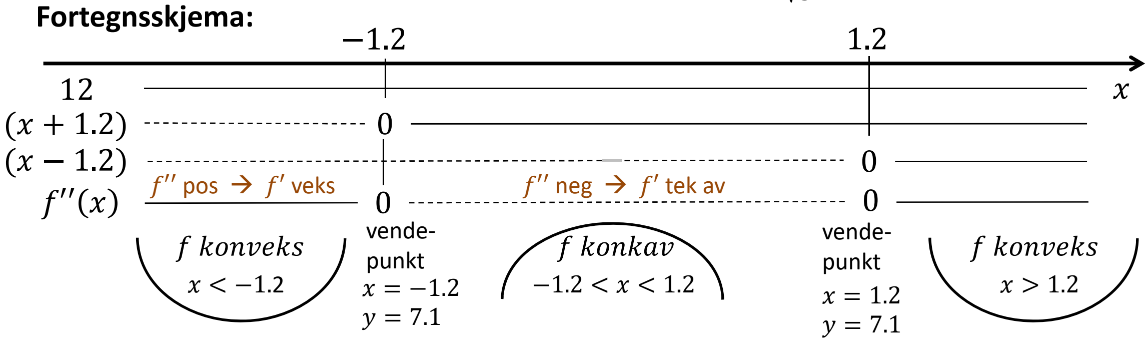
$$f'(x) = 4x^3 - 16x \quad \rightarrow \quad f''(x) = 4 \cdot (3x^{3-1}) - 16 \cdot 1 = \underline{\underline{12x^2 - 16}}$$

Faktorisering: $f''(x) = 12x^2 - 16 = 12\left(x^2 - \frac{16}{12}\right) = 12\left(x^2 - \frac{4}{3}\right)$

$$= 12\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx 12(x + 1.2)(x - 1.2)$$

Obs! $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.1547 \approx 1.2$

Fortegnsskjema:



Oppgave 1

En funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

c) Skisser grafen til f

Husk å kontrollere !!

Fra pkt. a)

Først funksjonsverditabellen

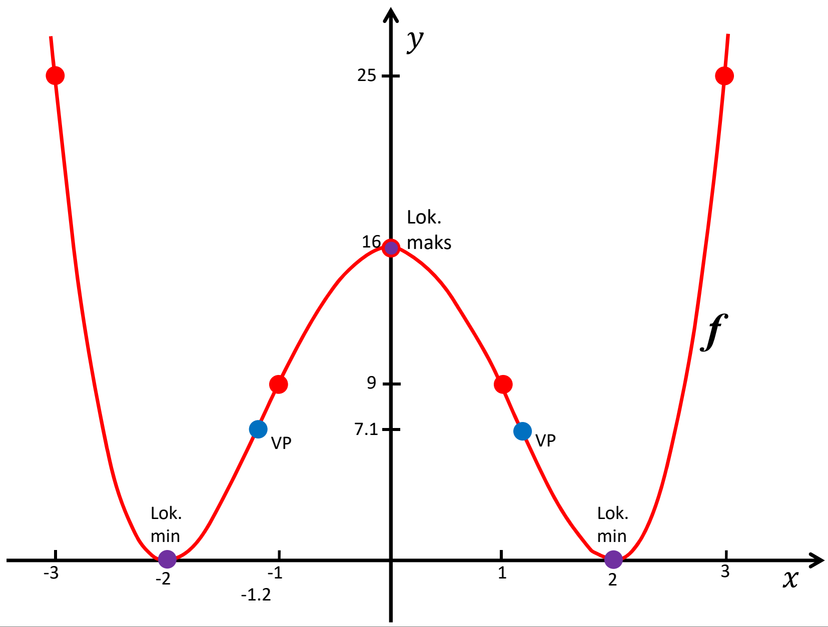
x	-3	-1	0	1	3
y	25	9	16	9	25

Så nullpunkt: $y = f(x) = 0$

$x = -2$, eller $x = 2$

Fra pkt. b): Info fra $f'(x)$

Fra pkt. c): Info fra $f''(x)$



Oppgave 1

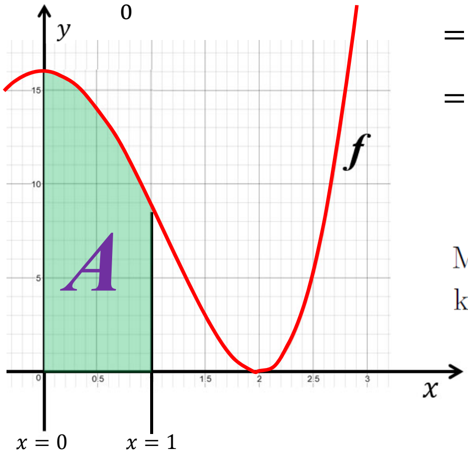
En funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

d) Beregn verdien: $A = \int_0^1 (x^4 - 8x^2 + 16)\,dx$

$$A = \int_0^1 (x^4 - 8x^2 + 16)\,dx = \left[\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{8}{3}x^3 + 16x\right]_0^1$$

$$= \left(\tfrac{1}{5}1^5 - \tfrac{8}{3}1^3 + 16\cdot 1\right) - \left(\tfrac{1}{5}0^5 - \tfrac{8}{3}0^3 + 16\cdot 0\right)$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{8}{3} + 16 = \frac{1\cdot 3 - 8\cdot 5 + 16\cdot 15}{5\cdot 3} = \underline{\underline{\frac{203}{15}}} \approx 13.53$$



Merk av det området på grafskissen som A kan sies å angi størrelsen på.