Handelshøyskolen
Universitetet i Sørøst-Norge

EKSEMPEL PÅ EKSAMENSOPPGAVER

I

MATEMATIKK

Høst 2021 – Vår 2024

Alle oppgavesett har løsningsforslag bakerst i dette heftet.

På nettsidene www.matematikk.nu under fanen merket med «Oppgaveløsninger», helt nederst, er det løsningsforslag til noen eldre eksamensoppgaver

Emneansvarlig Roy M. Istad

Universitetet i Sørøst-Norge
Handelshøyskolen

EKSAMEN 09.12.2021

MAT1000 - MATEMATIKK FOR ØKONOMER

Tid:	4 timer (09:00 - 13:00)
Sidetall:	2
Hjelpemiddel:	Alle (hjemmeeksamen) Mottak av hjelp, eller samarbeid er ikke tillatt
Vekting:	Alle delspørsmål teller likt (10 % hver)
Merknad:	Alle svar skal begrunnes

BOKMÅL

Oppgave 1

Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

a) Regn ut funksjonsverdiene til følgende x-verdier: $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$.
Vis at $f(x)$ kan skrives som $f(x) = (x^2-4)(x^2+2)$
Bestem nullpunktene til f og avgjør hvor funksjonen er positiv, og hvor den er negativ.

b) Bestem $f'(x)$, og avgjør hvor funksjonen f er voksende og hvor den er avtagende.
Finn lokale ekstrempunkt for f og avgjør om noen av dem er globale.

c) Bestem $f''(x)$. Avgjør hvor grafen til f er konkav, og hvor den er konveks og finn vendepunktene til f.
Skisser grafen til f. NB! Håndtegnet, ikke utskrift fra matematikkprogram.

d) Regn ut verdien av det bestemte integralet: $\displaystyle\int_0^2 (-x^4 + 2x^2 + 8)\,dx$
Finn størrelsen på arealet som er avgrenset av grafen til f og x-aksen.

Oppgave 2

a) Funksjonen g er gitt ved at: $\quad g(x) = \dfrac{3x+2}{3x-2}$

For hvilken x-verdi er ikke g definert?

Finn skjæringspunktene mellom g og koordinataksene.

Bestem $g'(x)$ og bruk denne til å vise at g ikke har noen ekstrempunkt.

b) Gitt funksjonen $h(x) = (2x+1)e^{-x^2}$

Vis at $h'(x) = (2-2x-4x^2)e^{-x^2}$ og bruk dette til å finne eventuelle ekstrempunkt for h.

Oppgave 3

a) Anne har satt inn i banken et beløp på 25 000 kr til en rente på 1.5 % årlig.
Hva er verdien av beløpet etter 1 år, 3 år og etter 10 år?
Hvor mange år går det før verdien av beløpet er 30 000 kr?

Jonas kjøpte i 2015 en leilighet på fjellet til 1 800 000 kr. Etter 5 år solgte han leiligheten for 2 200 000 kr. Hva var gjennomsnittlig årlig prosentvis verdistigning på leiligheten i de 5 årene Jonas eide den?

b) Bjarne tok i 2019 opp et lån på 2 500 000 kr til kjøp av hus. Renten på lånet er 1.7 % årlig, og lånet betales over 20 år med like store årlige beløp, første gang var ett år etter låneopptaket. Hva er det årlige beløpet Bjarne betaler på lånet?

Umiddelbart etter andre betaling på lånet i 2021 ble renta satt opp til 2.0 % årlig. Det fører til at de årlige beløpene må økes hvis avtalt betalingsperiode skal ligge fast. Bjarne ønsker imidlertid å foreta en ekstra betaling i 2022 slik at det årlige beløpet fra 2023 og utover blir det samme som han betalte i 2020 og 2021. Hvor mye må Bjarne betale på lånet i 2022?

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x,y) = x^2 - 3x - xy + y^2$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.

Vis at h har kun ett stasjonært punkt: $(2,\ 1)$. Klassifiser det stasjonære punktet.

b) Finn minimum for funksjonen h under bibetingelsen: $x + y = 2$.

Universitetet i Sørøst-Norge
Handelshøyskolen

EKSAMEN
03.03.2022

MAT1000 - MATEMATIKK FOR ØKONOMER

Tid:	4 timer (09:00 - 13:00)
Sidetall:	2
Hjelpemiddel:	Alle (hjemmeeksamen) Mottak av hjelp, eller samarbeid er ikke tillatt
Vekting:	Alle delspørsmål teller likt (10 % hver)
Merknad:	Alle svar skal begrunnes

Oppgave 1

En funksjon f er gitt ved at: $\quad f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

a) Regn ut funksjonsverdiene til følgende x-verdier: $-2,\ 0,\ 1,\ 3$
Vis at f kan skrives som: $f(x) = (x^2 - 1)^2$
Finn nullpunktene til funksjonen f, og grunngi at den er positiv overalt utenom nullpunktene.

b) Bestem $f'(x)$.
Avgjør hvor funksjonen f er voksende og hvor den er avtagende.
Finn lokale ekstrempunkt for f og avgjør om noen av dem er globale.

c) Bestem $f''(x)$.
Avgjør hvor grafen til f er konkav, og hvor den er konveks og finn vendepunktene til f.
Skisser grafen til f. NB! Håndtegnet, ikke utskrift fra matematikkprogram.

d) Finn likningen for tangenten til grafen til f når $x = 0$ og merk den av på grafskissen.
Bestem verdien A der
$$A = \int_0^1 1\,dx - \int_0^1 \left(x^4 - 2x^2 + 1\right)\,dx$$
Merk av det området på grafskissen som A kan sies å angi størrelsen på.

Oppgave 2

a) Funksjonen g er gitt ved at: $g(x) = \dfrac{2x-3}{2x+3}$

For hvilken x-verdi er ikke g definert?

Finn skjæringspunktene mellom g og koordinataksene.

Bestem $g'(x)$ og bruk denne til å vise at g ikke har noen ekstrempunkt.

b) Gitt funksjonen $h(x) = x^2 e^{-(2x+1)}$

Vis at $h'(x) = (2x - 2x^2)e^{-(2x+1)}$ og bruk dette til å finne ekstrempunkt for h.

Regn ut verdien av det bestemte integralet: $\displaystyle\int_0^1 (2x-2x^2)e^{-(2x+1)}\,dx$

Oppgave 3

a) Jan har satt inn i banken et beløp på 35 000 kr til 1.75 % årlig rente.
Hva er verdien av beløpet etter 1 år, 2 år og etter 4 år?
Hvor mange år går det før verdien av beløpet er 40 000 kr?

Et transportfirma kjøpte i 2016 en buss for 1 600 000 kr. Etter 4 år solgte de bussen for 1 100 000 kr. Hva var gjennomsnittlig årlig prosentvis verditap på bussen i de 4 årene firmaet eide den?

b) Berit tok i 2018 opp et lån på 1 900 000 kr til kjøp av hytte på fjellet. Lånerenten er 1.8 % årlig, og lånet betales over 25 år med like store årlige beløp, første gang var ett år etter låneopptaket. Hva er det årlige beløpet Berit betaler på lånet?

Umiddelbart etter tredje betaling på lånet i 2021 ble renta satt ned til 1.7 % årlig. Det fører til at de årlige beløpene må reduseres hvis avtalt betalingsperiode skal ligge fast. Berit ønsker imidlertid å betale ett mindre beløp i 2022 slik at det årlige beløpet fra 2023 og utover blir det samme som hun betalte i årene 2019 - 2021. Hvor mye må Berit betale på lånet i 2022?

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x,y) = 3 - 6x + 7x^2 + y^2 - 4xy$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.

Vis at h har kun ett stasjonært punkt: $(1,\ 2)$. Klassifiser det stasjonære punktet.

b) Vis at h kan skrives som $h(x,y) = (y-2x)^2 + 3(x-1)^2$ og bruk dette til å grunngi at $(1,\ 2)$ gir et globalt ekstrempunkt for h.

Finn minimum for h under bibetingelsen: $x - y = 1$.

EKSAMENSFORSIDE

Emnekode: MAT1000	Emnenavn: Matematikk for økonomer	
Emneansvarlig: Per Chr. Hagen	Campus: Bø, Drammen, Kongsberg, Ringerike, Vestfold	Fakultet: Handelshøyskolen
Utlev. dato og tidspunkt 24.11.2022 kl. 9.00		Innlev. dato og tidspunkt 24.11.2022 kl. 13.00
Antall oppgaver: 4	Antall vedlegg: 1	Ant. sider inkl. forside og vedlegg: 9

Hjelpemidler:
Tillatte hjelpemidler: Formelsamling og godkjent kalkulator
Vedlegg: Formelsamling

Side 1: Forside
Side 2-3: Oppgavesett bokmål
Side 3-5: Oppgavesett nynorsk
Side 6-9: Formelsamling

Andre viktige opplysninger: Alle 10 delpunkter teller likt ved sensuren.

Oppgave 1

Funksjonen *f* er gitt ved at: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

a) Regn ut funksjonsverdier for følgende *x*-verdier: −1, 0, 1, 2, 3.
Vis at funksjonen kan skrives som: $f(x) = (x^2 - 2x)^2$
Finn nullpunktene til *f*.

b) Bestem $f'(x)$.
Avgjør hvor funksjonen *f* er voksende og hvor den er avtagende. Finn lokale ekstrempunkt for *f* og avgjør om noen av dem er globale.

c) Bestem $f''(x)$.
Gjør rede for hvordan grafen til *f* krummer og finn vendepunktene.
Skisser grafen til *f*.

d) A er arealet av området som er begrenset av grafen til *f* og *x*-aksen. Merk av A på skissen av grafen. Bestem arealet A.

Oppgave 2

Funksjonen g er gitt ved at: $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$

a) Regn ut funksjonsverdier for følgende x-verdier: $-2, -1, 0, 1, 2$.

Vis at $g'(x) = -x e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Avgjør hvor funksjonen g er voksende og hvor den er avtagende. Finn og klassifiser funksjonens ene ekstrempunkt.

b) Finn $g''(x)$.

Avgjør hvor g er konveks og hvor den er konkav. Finn vendepunktene til g. Skisser grafen til g og merk av vendepunktene på skissen.

Oppgave 3

a) Petter satte inn 50 000 kr i banken til 1.5 % årlig rente. Hva er verdien av beløpet etter 3 år og etter 10 år?

Hva måtte renten vært om 50 000 kr skulle vokst til 60 000 kr på 10 år?
Johannes har kjøpt ny bil som kostet 550 000 kr. Verditapet på bilen er 20 % det første året, 10 % det andre året og 10 % det tredje året. Hva blir verdien av bilen etter tre år? Hva er gjennomsnittlig årlig prosentvist verditap i de tre årene?

b) Kari har tatt opp et lån på 500 000 kr til kjøp av el-bil. Renten på lånet er 4.5 % årlig, og lånet skal betales over 5 år med like store årlige beløp, første gang om ett år. Hva er det årlige beløpet som Kari skal betale?

Etter tre år, når Kari skal foreta sin tredje betaling på lånet, vurderer hun å bytte bil. Da vil hun betale ned hele billånet på el-bilen hun har nå. Hvor mye må hun da betale?

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x, y) = x^2 y - xy - x + 1$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.
Vis at funksjonen har nøyaktig to stasjonære punkt: $(0, -1)$ og $(1, 1)$.
Klassifiser de to stasjonære punktene.

b) Finn og skisser linja gjennom de to stasjonære punktene i xy-planet.
Finn maksimum og minimum for funksjonen h på denne linja når $0 \leq x \leq 1$.

EKSAMENSFORSIDE

Universitetet i Sørøst-Norge

Emnekode: MAT1000	Emnenavn: Matematikk for økonomer	
Emneansvarlig: Per Chr. Hagen	Campus: Bø, Drammen, Kongsberg, Ringerike, Vestfold	Fakultet: Handelshøyskolen
Utlev. dato og tidspunkt 2.03.2023 kl. 9.00	Innlev. dato og tidspunkt 2.03.2023 kl. 13.00	
Antall oppgaver: 4	Antall vedlegg: 1	Ant. sider inkl. forside og vedlegg: 9

Hjelpemidler:

Tillatte hjelpemidler: Formelsamling og godkjent kalkulator

Vedlegg: Formelsamling

Andre viktige opplysninger: Alle 10 delpunkter teller likt ved sensuren.

BOKMÅL

Oppgave 1

Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

a) Regn ut funksjonsverdier for følgende x-verdier: -2, -1, 0, 1, 2.
Vis at funksjonen kan skrives som: $f(x) = (x-1)(x+1)^2$
Finn nullpunktene til f og avgjør hvor funksjonen er positiv og hvor den er negativ.

b) Bestem $f'(x)$.
Avgjør hvor funksjonen f er voksende og hvor den er avtagende. Finn lokale ekstrempunkt for f og avgjør om noen av dem er globale.

c) Bestem $f''(x)$.
Gjør rede for hvordan grafen til f krummer og finn vendepunktet.
Skisser grafen til f.

d) A er arealet av området som er begrenset av grafen til f og x-aksen. Merk av A på skissen av grafen. Bestem arealet A.

Oppgave 2

a) Funksjonen g er gitt ved at $g(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$

For hvilken x-verdi er g ikke definert?

Bestem skjæringspunktene mellom grafen til g og de to koordinataksene.

Bestem $g'(x)$ og bruk denne til å avgjøre om g har noen ekstrempunkter i definisjonsområdet.

b) Funksjonen h er gitt ved at $h(x) = \ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)$

Forklar kort hvorfor h ikke er definert for $-1 \le x \le 2$

Bestem $h'(x)$ og bruk denne til å avgjøre om h har noen ekstrempunkter i definisjonsområdet.

Oppgave 3

a) Ragnar satte inn 20 000 kr i banken til 2.5 % årlig rente. Hva er verdien av beløpet etter 1 år, 5 år og 10 år?

Hvor lang tid vil det ta før beløpet er vokst til 30 000 kr?

Hva måtte renten ha vært om 20 000 kr skulle ha vokst til 30 000 kr på 10 år?

b) Kjell tok i 2019 opp et lån på 400 000 kr til kjøp av elbil. Renten på lånet er 5 % årlig, og lånet betales over 5 år med like store årlige beløp, første gang ett år etter låneopptaket. Hva er det årlige beløpet som Kjell betaler på lånet?

Umiddelbart etter tredje betaling i 2022 ble renten satt opp til 6 %. Hva er det nye beløpet som Kjell skal betale i 2023 og 2024?

Oppgave 4

Funksjonen *h* er gitt ved at: $h(x, y) = xy - x^2 y + 2x^3$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen *h*.
Vis at funksjonen har nøyaktig to stasjonære punkt: (0, 0) og (1, 6).
Klassifiser de to stasjonære punktene.

b) Finn minimum for funksjonen *h* under bibetingelsen $y - 2x = 1$.

NYNORSK

Oppgåve 1

Funksjonen *f* er gitt ved at: $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

a) Rekn ut funksjonsverdiane for følgjande *x*-verdiar: -2, -1, 0, 1, 2.
Vis at funksjonen kan skrivast som: $f(x) = (x-1)(x+1)^2$
Finn nullpunkta til *f* og avgjer kor funksjonen er positiv og kor den er negativ.

b) Bestem $f'(x)$.
Avgjer kor funksjonen *f* er veksande og kor den er avtakande. Finn lokale ekstrempunkt for *f* og avgjer om nokre av dei er globale.

c) Bestem $f''(x)$.
Gjer greie for korleis grafen til f krummar og finn vendepunktet.
Skisser grafen til f.

d) A er arealet av området som er avgrensa av grafen til f og x-aksen. Merk av A på skissa av grafen. Bestem arealet A.

Oppgåve 2

a) Funksjonen g er gitt ved at $g(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$

For kva x-verdi er g ikkje definert?

Bestem skjeringspunkta mellom grafen til g og dei to koordinataksane.

Bestem $g'(x)$ og bruk denne til å avgjere om g har nokre ekstrempunkt i definisjonsområdet.

b) Funksjonen h er gitt ved at $h(x) = \ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)$

Forklar kort kvifor h ikkje er definert for $-1 \leq x \leq 2$

Bestem $h'(x)$ og bruk denne til å avgjere om h har nokre ekstrempunkt i definisjonsområdet.

Oppgåve 3

a) Ragnar sette inn 20 000 kr i banken til 2.5 % årleg rente. Kva er verdien av beløpet etter 1 år, 5 år og 10 år?

Kor lang tid vil det ta før beløpet har vakse til 30 000 kr?

Kva måtte renta ha vore om 20 000 kr skulle ha vakse til 30 000 kr på 10 år?

b) Kjell tok i 2019 opp eit lån på 400 000 kr til kjøp av elbil. Renta på lånet er 5 % årleg, og lånet skal betalast over 5 år med like store årlege beløp, første gang eitt år etter låneopptaket. Kva er det årlege beløpet som Kjell betalar på lånet?

Umiddelbart etter tredje betaling i 2022 blei renta sett opp til 6 %. Kva er det nye beløpet som Kjell skal betale i 2023 og 2024?

Oppgåve 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x, y) = xy - x^2 y + 2x^3$

a) Finn dei partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.
Vis at funksjonen har nøyaktig to stasjonære punkt: (0, 0) og (1, 6).
Klassifiser dei to stasjonære punkta.

b) Finn minimum for funksjonen h under bibetingelsen $y - 2x = 1$.

Universitetet i Sørøst-Norge
Handelshøyskolen

EKSAMEN
15. 12. 2023

MAT1000 - Matematikk for økonomer

Tid:	4 timer (09:00 - 13:00)
Sidetall:	2
Hjelpemiddel:	Vedlagt formelsamling og godkjent kalkulator
Vekting:	Alle delspørsmål teller likt (10 % hver)
Merknad:	Alle svar skal begrunnes

Bokmål

Oppgave 1

Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

a) Regn ut funksjonsverdiene til følgende x-verdier: $-3, -1, 1, 4$.
Vis at $f(x)$ kan skrives som $f(x) = (x^2 - 4)(x - 2)$
Bestem nullpunktene til f.
Avgjør hvor funksjonen er positiv og hvor den er negativ.

b) Bestem $f'(x)$.
Avgjør hvor funksjonen f er voksende og hvor den er avtagende.
Finn lokale ekstrempunkt for f og avgjør om noen av dem er globale.

c) Bestem $f''(x)$.
Avgjør hvor grafen til f er konkav, hvor den er konveks og hvor den har vendepunkt.
Skisser grafen til f.

d) Regn ut verdien: $A = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 - 4x + 8)\, dx$

A kan tolkes som størrelsen på et område. Merk av dette området på grafskissen.

Oppgave 2

a) Deriver de tre funksjonene:

i) $f(x) \;=\; e^{2x}$

ii) $g(x) \;=\; (2x-1)\,e^{x}$

iii) $h(x) \;=\; x-1+\ln(2x-1)$

b) For de tre funksjonene i punkt a)

i) Bestem både $f(0)$ og $f'(0)$.

ii) Finn skjæringspunktene mellom grafen til g og koordinataksene.

iii) Finn skjæringspunktet mellom grafen til h og den rette linja $y = x - 1$.

Oppgave 3

a) Sondre har satt i banken et beløp på 125 000 kr til en rente på 3.5 % årlig.

Hva er verdien av beløpet etter 2 år og etter 5 år?

Hvor mange år tar det før beløpet er vokst til 200 000 kr?

Hva måtte innsatt beløp ha vært for at verdien skulle være 200 000 kr etter 5 år?

b) Edna har lånt 2 400 000 kr til kjøp av bolig. Renten på lånet er 5.5 % årlig, og lånet betales over 30 år med like store årlige beløp, første gang var ett år etter låneopptaket. Hva er det årlige beløpet Edna betaler på lånet?

Sondre vurderer også å kjøpe seg bolig. Hans økonomi kan tåle et lån med en årlig betaling på maksimalt 200 000 kr. Årlig rente er 5.5 %, betalingstiden er 30 år og første betaling skjer ett år etter låneopptak. Hvor mye kan Sondre maksimalt låne til kjøp av bolig?

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x,y) \;=\; 9-2x^2-4y+2xy$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.

Vis at h har kun ett stasjonært punkt: $(2,\ 4)$.

Klassifiser det stasjonære punktet.

b) Finn funksjonsverdien i det stasjonære punktet for h.

Bestem maksimum for funksjonen h under bibetingelsen: $x + y = 6$.

Universitetet i Sørøst-Norge
Handelshøyskolen

EKSAMEN
15. 12. 2023

MAT1000 - Matematikk for økonomar

Tid:	4 timar (09:00 - 13:00)
Sidetal:	2
Hjelpemiddel:	Vedlagt formelsamling og godkjent kalkulator
Vekting:	Alle delspørsmål tel likt (10 % kvar)
Merknad:	Alle svar skal grunngjevast

NYNORSK

Oppgåve 1

Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

a) Rekn ut funksjonsverdiane til følgande x-verdiar: $-3, -1, 1, 4$.
Vis at $f(x)$ kan skrivast som $f(x) = (x^2-4)(x-2)$
Bestem nullpunkta til f.
Avgjer kor funksjonen er positiv og kor han er negativ.

b) Bestem $f'(x)$.
Avgjer kor funksjonen f er veksande og kor han er avtakande.
Finn lokale ekstrempunkt for f og avgjer om nokon av dei er globale.

c) Bestem $f''(x)$.
Avgjer kor grafen til f er konkav, kor han er konveks og kor han har vendepunkt.
Skisser grafen til f.

d) Rekn ut verdien: $A = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 - 4x + 8)\, dx$
A kan tolkast som storleiken på eit område. Merk av dette området på grafskissa.

Oppgåve 2

a) Deriver dei tre funksjonane:

i) $f(x) = e^{2x}$

ii) $g(x) = (2x-1)\,e^{x}$

iii) $h(x) = x - 1 + \ln(2x-1)$

b) For dei tre funksjonane i punkt a)

i) Bestem både $f(0)$ og $f\,'(0)$.

ii) Finn skjeringspunkta mellom grafen til g og koordinataksane.

iii) Finn skjeringspunktet mellom grafen til h og den rette linja $y = x - 1$.

Oppgåve 3

a) Sondre har sett i banken eit beløp på 125 000 kr til ei rente på 3.5 % årleg.

Kva er verdien av beløpet etter 2 år og etter 5 år?

Kor mange år tar det før beløpet har vakse til 200 000 kr?

Kva måtte innsett beløp ha vore for at verdien skulle vere 200 000 kr etter 5 år?

b) Edna har lånt 2 400 000 kr til kjøp av bustad. Renta på lånet er 5.5 % årleg, og lånet betalast over 30 år med like store årlege beløp, første gang var eitt år etter låneopptaket. Kva er det årlege beløpet Edna betaler på lånet?

Sondre vurderer òg å kjøpe seg bustad. Han har ein økonomi som kan tåle eit lån med ei årleg betaling på maksimalt 200 000 kr. Årleg rente er 5.5 %, betalingstida er 30 år og første betaling skjer eitt år etter låneopptak. Kor mykje kan Sondre maksimalt låne til kjøp av bustad?

Oppgåve 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x,y) = 9 - 2x^2 - 4y + 2xy$

a) Finn dei partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.

Vis at h har berre eitt stasjonært punkt: $(2,\ 4)$.

Klassifiser det stasjonære punktet.

b) Finn funksjonsverdien i det stasjonære punktet for h.

Bestem maksimum for funksjonen h under bibetingelsen: $x + y = 6$.

Universitetet i Sørøst-Norge
Handelshøyskolen

EKSAMEN
29. 02. 2024

MAT1000 - Matematikk for økonomer

Tid:	4 timer (09:00 - 13:00)
Sidetall:	2
Hjelpemiddel:	Vedlagt formelsamling og godkjent kalkulator
Vekting:	Alle delspørsmål teller likt (10 % hver)
Merknad:	Alle svar skal begrunnes

Bokmål

Oppgave 1

Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

a) Regn ut funksjonsverdiene til følgende x-verdier: $-2,\ -1,\ 1,\ 4$.
Vis at $f(x)$ kan skrives som $f(x) = (x+1)(x-2)^2$
Bestem nullpunktene til f.
Avgjør hvor funksjonen er positiv og hvor den er negativ.

b) Bestem $f'(x)$.
Avgjør hvor funksjonen f er voksende og hvor den er avtagende.
Finn lokale ekstrempunkt for f og avgjør om noen av dem er globale.

c) Bestem $f''(x)$.
Avgjør hvor grafen til f er konkav, hvor den er konveks og hvor den har vendepunkt.
Skisser grafen til f.

d) Regn ut verdien: $$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - 3x^2 + 4)\, dx$$
A kan tolkes som størrelsen på et område. Merk av dette området på grafskissen.

Oppgave 2

a) Deriver de tre funksjonene:

   i) $f(x) \;=\; e^{3x}$

   ii) $g(x) \;=\; (3x+1)\,e^{x}$

   iii) $h(x) \;=\; 2x \;+\; \ln(x+2)$

b) De tre funksjonene f, g og h er gitt i punkt a):

   i) Bestem både $f(0)$ og $f\,'(0)$.

   ii) Finn skjæringspunktene mellom grafen til g og koordinataksene.

   iii) Finn skjæringspunktet mellom grafen til h og den rette linja $y = 2x$.

Oppgave 3

a) Mia har satt i banken et beløp på 60 000 kr til en rente på 3 % årlig.

   Hva er verdien av beløpet etter 1 år og etter 4 år?

   Hvor mange år tar det før beløpet er vokst til 90 000 kr?

   Hva måtte årlig rente være for at beløpet skulle ha vokst til 90 000 kr etter 10 år?

b) Mads har lånt 1 500 000 kr til kjøp av leilighet. Renten på lånet er 6 % årlig, og lånet betales over 20 år med like store årlige beløp, første gang var ett år etter låneopptaket. Hva er det årlige beløpet Mads betaler på lånet?

   Mia planlegger å sette inn et månedlig innskudd på 6 000 kr i banken til 0.5 % månedlig rente. Hvor mye vil hun ha på konto etter tre år, dvs. rett (umiddelbart) etter det 36. innskuddet?

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $\quad h(x,y) \;=\; 2 + 6x - 3xy + 3y^2$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.

   Vis at h har kun ett stasjonært punkt: $(4,\ 2)$.

   Klassifiser det stasjonære punktet.

b) Finn funksjonsverdien for h i punktet $(4,\ 3)$.

   Bestem maksimum for funksjonen h under bibetingelsen: $-x + 2y = 2$.

Oppgave 1

Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

a) Regn ut funksjonsverdiene til følgende x-verdier: $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$.

Funksjonsverditabell:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	0	-9	-8	-9	0	55

Resten er beregnet på samme måte.

Regner ut y-verdi detaljert: Ser på både $x = \pm 2$

$$y = f(\pm 2) = (\pm 2)^4 - 2(\pm 2)^2 - 8$$
$$= 16 - 2 \cdot 4 - 8 = 16 - 8 - 8 = \underline{\underline{0}}$$

NB! pga. x^4 og x^2 så forsvinner fortegnet ($\pm$) i utregningene (og grafen blir symmetrisk om y-aksen).

Vis at $f(x)$ kan skrives som
$$f(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 2)$$

Multipliser ut på høyresiden:

$$(x^2 - 4)(x^2 + 2)$$
$$= x^2 \cdot x^2 + x^2 \cdot 2 - 4 \cdot x^2 - 4 \cdot 2$$
$$= x^4 + 2x^2 - 4x^2 - 8$$
$$= x^4 - 2x^2 - 8 = f(x)$$ **Ok!**

Bestem nullpunktene til f

Søker x slik at: $y = f(x) = 0$

Løsning? Produkt = 0 → Faktorisering av $f(x)$

dvs. $f(x) = 0$ *når* $(x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0$

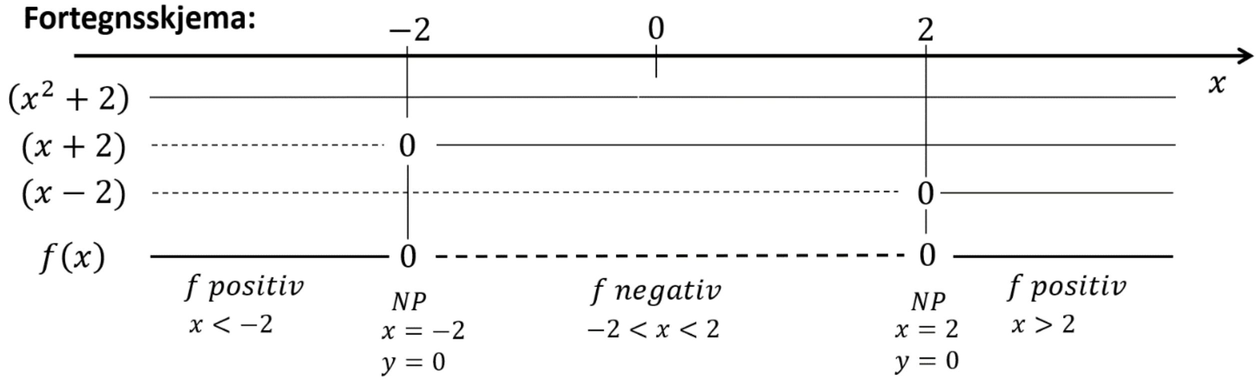
$$0 = (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 2)$$ NB! 3.KVS på første parentes
$$= (x + 2)(x - 2) \cdot (x^2 + 2)$$ NB! $(x^2 + 2) \neq 0$

altså *når* $\underline{\underline{x = -2}}$ eller *når* $\underline{\underline{x = 2}}$

avgjør hvor funksjonen er positiv, og hvor den er negativ.

Faktorisering: $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 2) = (x + 2)(x - 2) \cdot (x^2 + 2)$

Fortegnsskjema:



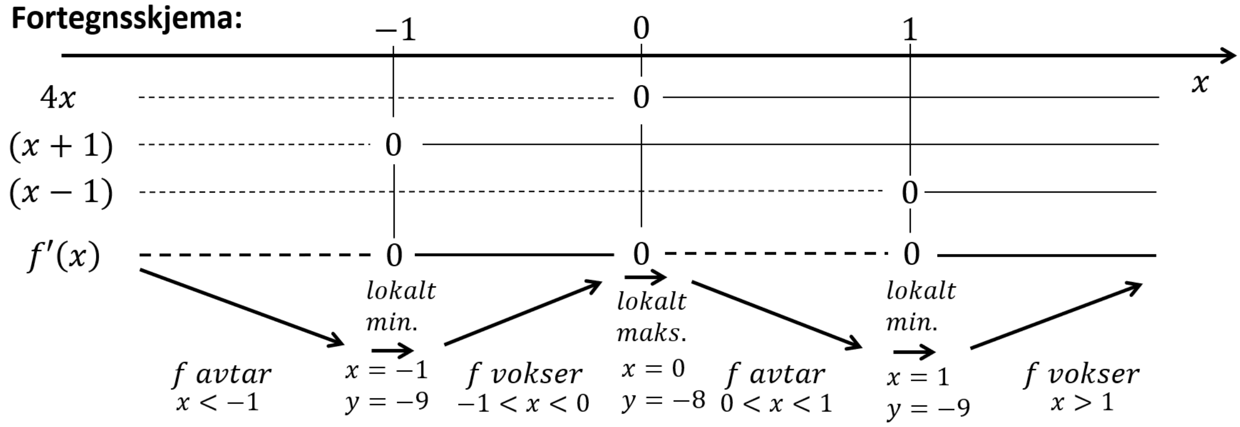
b) Bestem $f'(x)$. $f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} - 2(2 \cdot x^{2-1}) - 0 = \underline{\underline{4x^3 - 4x}}$

Avgjør hvor funksjonen f er voksende og hvor den er avtagende.

Faktorisering:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x\,(x^2 - 1) \overset{\text{3.KVS}}{=} 4x(x + 1)(x - 1)$$

Fortegnsskjema:



Finn lokale ekstrempunkt for f og avgjør om noen av dem er globale.

1) Lokalt minimum når: $x = -1$, eller $x = 1$

Omskriver først (fullstendig kvadrat): $y = f(x) = (x^2)^2 - 2 \cdot 1 \cdot x^2 + 1 - 1 - 8$

dvs. $y = f(x) = \underbrace{(x^2-1)^2}_{\geq 0} - 9 \geq -9$, dvs. alle y-verdier er større enn, eller -9

dette inntreffer når $x^2 = 1$, dvs. $x = \pm 1$

Da må disse også gi globalt minimum for f: $x = \pm 1$, $y = -9$

2) Lokalt maksimum i punktet: $x = 0$, $y = -8$

Fra tabellen i pkt a) ser vi f.eks. at y -verdiene for $x = \pm 2$ er lik 0, og da større enn -8!
Altså har ikke f noe globalt maksimum (i det eneste kandidatpunktet).

c) Bestem $f''(x)$. $f'(x) = 4x^3 - 4x \rightarrow f''(x) = 4 \cdot (3x^{3-1}) - 4 \cdot 1 = \underline{\underline{12x^2 - 4}}$

Avgjør hvor grafen til f er konkav, og hvor den er konveks og finn vendepunktene til f.

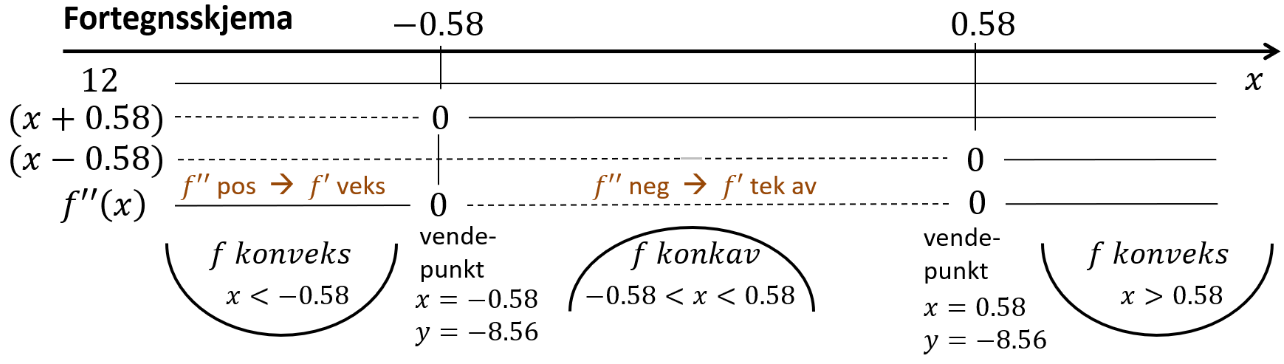
Faktorisering: $f''(x) = 12x^2 - 4 = 12\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \overset{\text{3.KVS}}{=} 12\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\approx 12(x + 0.58)(x - 0.58)$

$y = f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 - 2\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 8$

$= \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} - 8 = -\frac{77}{9} \approx -8.56$

Fortegnsskjema



Skisser grafen til f

Husk å kontrollere !!

Fra pkt. a)

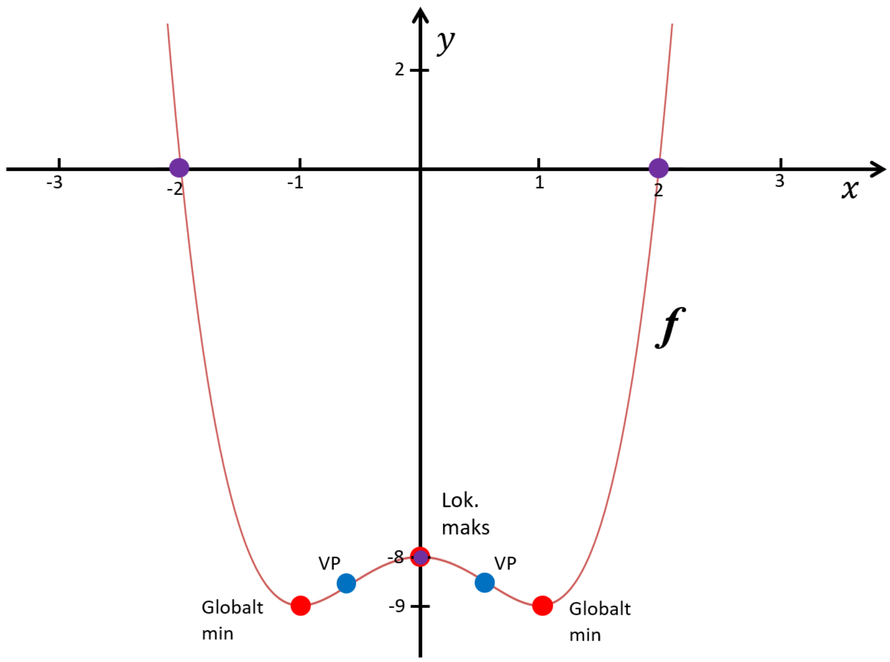
Først funksjonsverditabellen

x	-2	-1	0	1	2	3
y	0	-9	-8	-9	0	55

Så nullpunkt: $y = f(x) = 0$
når $x = -2$, eller $x = 2$

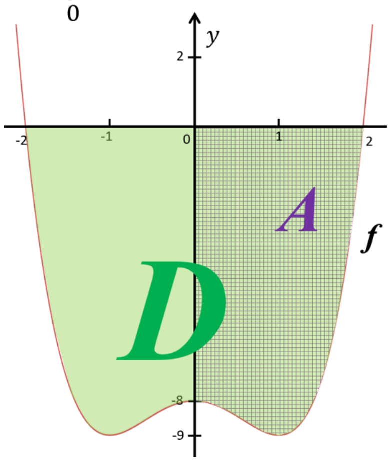
Fra pkt. b): Info fra $f'(x)$

Fra pkt. c): Info fra $f''(x)$



d) Regn ut verdien av det bestemte integralet: $\int_0^2 (-x^4 + 2x^2 + 8)\,dx$

$$A = \int_0^2 (-x^4 + 2x^2 + 8)\,dx = \left[-\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{2}{3}x^3 + 8x\right]_0^2 = \left(-\tfrac{1}{5}2^5 + \tfrac{2}{3}2^3 + 8\cdot 2\right) - 0$$



$$= -\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 16 = \frac{-32\cdot 3 + 16\cdot 5 + 16\cdot 15}{5\cdot 3} = \underline{\underline{\frac{224}{15}}} \approx 14.93$$

Finn størrelsen på arealet som er avgrenset av grafen til f og x-aksen. NB! f er negativ (under y-aksen), må integrere $-f(x)$

$$D = \int_{-2}^{2} -f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} (-x^4 + 2x^2 + 8)\,dx$$

$$= 2\cdot\int_0^2 (-x^4 + 2x^2 + 8)\,dx = 2\cdot\frac{224}{15} = \underline{\underline{\frac{448}{15}}} \approx 29.87$$

Altså, $D = 2A$

Oppgave 2

a) Funksjonen g er gitt ved at: $g(x) = \dfrac{3x+2}{3x-2}$

For hvilken x-verdi er ikke g definert?

Nevner kan ikke være 0: $3x - 2 \neq 0 \;\rightarrow\; 3x \neq 2 \;\rightarrow\; \underline{\underline{x \neq \tfrac{2}{3}}}$

Finn skjæringspunktene mellom g og koordinataksene.

Skjæringspkt. med y-aksen (sett $x = 0$): $y = g(0) = \frac{3\cdot 0+2}{3\cdot 0-2} = \frac{2}{-2} = -1$

Skjæringspkt. med x-aksen (sett $y = 0$): $y = g(x) = \frac{3x+2}{3x-2} = 0$ NB! Brøk er 0 når teller er 0

$$3x + 2 = 0 \;\rightarrow\; 3x = -2 \;\rightarrow\; x = -\frac{2}{3}$$

Skjæringspkt. med aksene er altså: $\underline{\underline{(x,y) = (0,-1)}}$ og $\underline{\underline{(x,y) = (-\tfrac{2}{3}, 0)}}$

Bestem $g'(x)$ og bruk denne til å vise at g ikke har noen ekstrempunkt.

$$g'(x) = \frac{(3x+2)'\cdot(3x-2) - (3x+2)\cdot(3x-2)'}{(3x-2)^2} = \frac{3\cdot(3x-2) - (3x+2)\cdot 3}{(3x-2)^2} = \frac{9x-6-9x-6}{(3x-2)^2} = \underline{\underline{\frac{-12}{(3x-2)^2}}}$$

$g(x)$ har ingen ekstrempunkt fordi $g'(x)$ ikke kan bli 0 (siden telleren i brøken er -12).
Her er altså $g'(x) < 0$ for alle x, og g er derfor avtagende for alle x i definisjonsområdet.

b) Gitt funksjonen $h(x) = (2x+1)e^{-x^2}$

Vis at $h'(x) = (2 - 2x - 4x^2)e^{-x^2}$ og bruk dette til å finne eventuelle ekstrempunkt for h.

$$h'(x) = (2x+1)'\cdot e^{-x^2} + (2x+1)\cdot\left(e^{-x^2}\right)' = 2\cdot e^{-x^2} + (2x+1)\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)$$

$$= \underline{\underline{(2 - 2x - 4x^2)e^{-x^2}}}$$

Vis at $h'(x) = (2 - 2x - 4x^2)e^{-x^2}$ og bruk dette til å finne eventuelle ekstrempunkt for h.

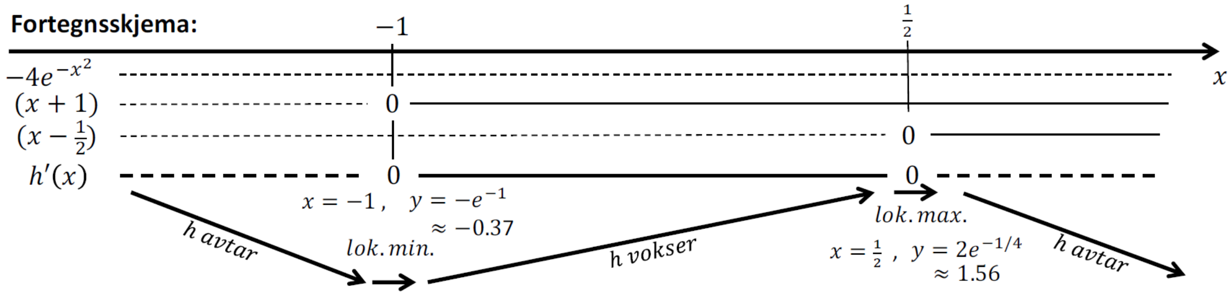
$$h'(x) = (2 - 2x - 4x^2)e^{-x^2} = 2(1 - x - 2x^2)e^{-x^2}$$

$h'(x) = 0$ når: $1 - x - 2x^2 = 0$, dvs. $2x^2 + x - 1 = 0$

Andregradsformelen: $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{-4}{4} = -1 \end{cases}$

$$h'(x) = (2 - 2x - 4x^2)e^{-x^2} = 2(1 - x - 2x^2)e^{-x^2} = -4\left(x - \tfrac{1}{2}\right)(x+1)e^{-x^2}$$

Fortegnsskjema:



Oppgave 3

a) Anne har satt inn i banken et beløp på 25 000 kr til en rente på 1.5 % årlig. Hva er verdien av beløpet etter 1 år, 3 år og etter 10 år?

Sluttverdi etter 1 år: $K_1 = 25000 \cdot 1.015 = \underline{\underline{25\,375}}$

Sluttverdi etter 3 år: $K_3 = 25000 \cdot 1.015^3 = \underline{\underline{26\,141.96}}$

Sluttverdi etter 10 år: $K_{10} = 25000 \cdot 1.015^{10} = \underline{\underline{29\,013.52}}$

Hvor mange år går det før verdien av beløpet er 30 000 kr?

Søker antall år n slik at: $K_n = 25000 \cdot 1.015^{\,n} = 30000$

$$1.015^{\,n} = \frac{30000}{25000} = 1.20 \quad \Big|\; ln(\,)$$

$$n \cdot ln\, 1.015 = ln\, 1.20$$

$$n = \frac{ln\, 1.20}{ln\, 1.015} \approx \underline{\underline{12.25 \text{ år}}}$$

a) Jonas kjøpte i 2015 en leilighet på fjellet til 1 800 000 kr. Etter 5 år solgte han leiligheten for 2 200 000 kr. Hva var gjennomsnittlig årlig prosentvis verdistigning på leiligheten i de 5 årene Jonas eide den?

Gjennomsnittlig årlig verdistigning på leiligheten: r

Sluttverdi etter 5 år: $1\,800\,000 \cdot (1+r)^5 = 2\,200\,000 \quad \Big| : 1\,800\,000$

$$(1+r)^5 = \frac{2\,200\,000}{1\,800\,000} = \frac{22}{18} = \frac{11}{9} \quad \Big| \sqrt[5]{}$$

$$1 + r = \sqrt[5]{\frac{11}{9}} \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[5]{\frac{11}{9}} - 1 \approx 0{,}041 = \underline{\underline{4.1\%}}$$

Alternativ på kalkulator: $\sqrt[5]{\frac{11}{9}} = \left(\frac{11}{9}\right)^{\frac{1}{5}}$

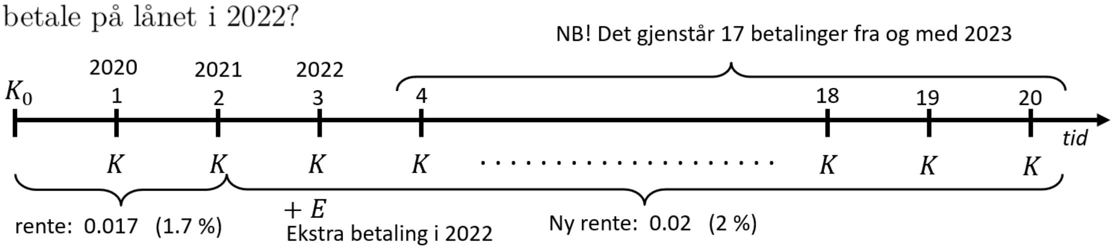
b) Bjarne tok i 2019 opp et lån på 2 500 000 kr til kjøp av hus. Renten på lånet er 1.7 % årlig, og lånet betales over 20 år med like store årlige beløp, første gang var ett år etter låneopptaket. Hva er det årlige beløpet Bjarne betaler på lånet?

Årlig betaling K (via låneformelen): $K = K_0 \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$

Lånet: $K_0 = 2\,500\,000$
Årlig rente: $r = 0.017$
Antall år: $n = 20$

Dvs. $K = 2500000 \cdot \frac{0.017 \cdot 1.017^{20}}{1.017^{20} - 1} = 148\,501.31$

Umiddelbart etter andre betaling på lånet i 2021 ble renta satt opp til 2.0 % årlig. Det fører til at de årlige beløpene må økes hvis avtalt betalingsperiode skal ligge fast. Bjarne ønsker imidlertid å foreta en ekstra betaling i 2022 slik at det årlige beløpet fra 2023 og utover blir det samme som han betalte i 2020 og 2021. Hvor mye må Bjarne betale på lånet i 2022?



Lånets verdi (saldo) i 2020: $K_0 \cdot 1.017 - K = 2\,393\,998.69 = K_1$

Lånets verdi (saldo) i 2021: $K_1 \cdot 1.017 - K = 2\,286\,195.36 = K_2$

Lånets verdi (saldo) umiddelbart før betaling i 2022: $K_2 \cdot 1.02 = 2\,331\,919.27$

Bjarnes ønsker altså å betale samme årlige beløp K som opprinnelig avtalt.

Restbetalingenes verdi i 2022 (nåverdi av annuitet): $R = 148\,501.31 \cdot \frac{1.02^{17} - 1}{0.02 \cdot 1.02^{17}}$

$(r = 0.02, \quad n = 17)$

$R = 2\,122\,361.70$

Bjarnes samlede betaling i 2022:

$$K + E = 2\,331\,919.27 - 2\,122\,361.70 = \underline{\underline{209\,557.57}}$$

Dvs. at ekstrabeløpet i 2022 var:

$$E = 209\,557.57 - 148\,501.31 = 61\,056.26$$

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x,y) = x^2 - 3x - xy + y^2$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.

Partielle deriverte av 1. orden: $\dfrac{\partial h}{\partial x} = 2x - 3 - y$ og $\dfrac{\partial h}{\partial y} = -x + 2y$

2. orden: $\underbrace{\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 2}_{A}$, $\underbrace{\dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = -1 = \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = -1}_{B}$, $\underbrace{\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 2}_{C}$

Vis at h har kun ett stasjonært punkt: (2, 1).

$\dfrac{\partial h}{\partial x} = 2x - 3 - y = 0 \;\rightarrow\; 2 \cdot 2y - 3 - y = 0 \;\rightarrow\; 3y = 3$, eller $y = 1$

og

$\dfrac{\partial h}{\partial y} = -x + 2y = 0 \xrightarrow{1} x = 2y \xrightarrow{4} x = 2 \cdot 1$, eller $x = 2$

Altså, ett stp.pkt: $(2, 1)$

Klassifiser det stasjonære punktet.

St.pkt	A	C	B	$\Delta = AC - B^2$	Type
$(2,1)$	2	2	-1	$2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3$ ($\Delta > 0$ og $A > 0$)	Lokalt minimum

b) Finn minimum for funksjonen h under bibetingelsen: $x + y = 2$.

Bibetingelsen kan omskrives til : $y = 2 - x$

Setter inn (substituerer) i h:

$$z = h(x,y) = h(x, 2-x) = x^2 - 3x - x(2-x) + (2-x)^2$$
$$= x^2 - 3x - 2x + x^2 + 4 - 4x + x^2 = 3x^2 - 9x + 4 = g(x)$$

$g'(x) = 6x - 9 = 6(x - \frac{3}{2}) = 0$, dvs. $x = \frac{3}{2} \longrightarrow y = 2 - x = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

Minimum? Sjekk g'': $g''(x) = 6 > 0$, dvs. g er konveks og har minimum

$$g\left(\tfrac{3}{2}\right) = 3\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 9\left(\tfrac{3}{2}\right) + 4 = \tfrac{27}{4} - \tfrac{27}{2} + 4 = -\tfrac{11}{4}$$

Konklusjon - Minimum for h under bibetingelsen: $z = h(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{11}{4} \approx -2.75$

EKSAMEN MAT1000 Matematikk — 03.03.22

№1

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2 \geq 0 \qquad (*)$$

dvs $y = f(x) \geq 0$ og $x = \pm 1$ gir globale min.

a)

x	-2	0	1	3
y	9	1	0	64

$$(x^2-1)^2 = (x^2-1)\cdot(x^2-1) = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$\underbrace{(x-1)(x+1)}\cdot\underbrace{(x-1)(x+1)} = (x-1)^2\cdot(x+1)^2$$

$\downarrow$ Nullpunkt

$\underline{\underline{x=-1,\ x=1}}$

b) $f'(x) = \underline{\underline{4x^3 - 4x}} = 4x(x^2-1)$

$= \underline{4x(x+1)(x-1)} \rightarrow$ fortegnsskjema

		-1		0		1	
$f'(x)$	$- - - -$	0	———	0	$- - - -$	0	———
	f avtar $\searrow$	lok. min	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$ f vokser

f avtar : $x < -1$, $0 < x < 1$

f vokser : $-1 < x < 0$, $x > 1$

$x=0$, $y=1$ er kun lokalt makspkt. $x = \pm 1$, $y = 0$ $(*)$ er også globale min. pkt.

c) $f''(x) = \underline{\underline{12x^2 - 4}} = 12\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = 12\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ $\quad \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58$

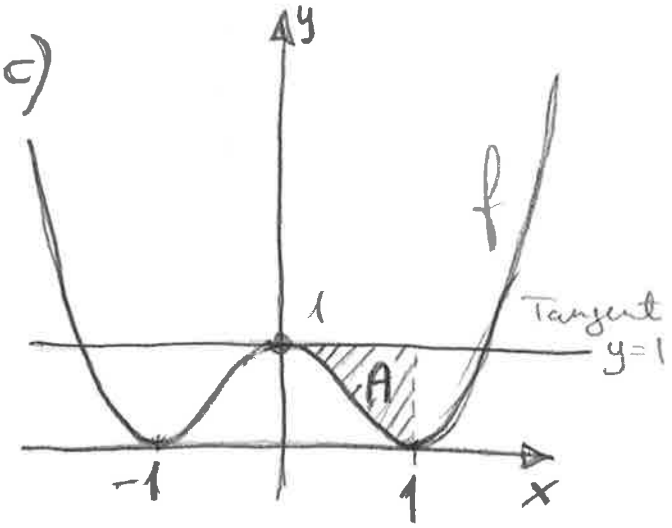
		$-0{,}58$		$0{,}58$	
$f''(x)$	——— f konveks	0	$- - -$ f konkav $- - -$	0	——— f konveks
	$x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$		$x > \frac{1}{\sqrt{3}}$

Vendepkt. $x = \pm \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}} \approx \pm 0{,}58$

$$y = f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{9} - 2\cdot\frac{1}{3} + 1 = \frac{1-6+9}{9} = \underline{\underline{\frac{4}{9}}}$$

≈ 0.44

c)



d) Tangent i $x=0$ og $y=1$: $y = sx + m$, der $s = f'(0) = 0$

$y = 0 \cdot x + m$ og $m = 1$ $\left(\begin{matrix} x=0 \\ y=1 \end{matrix} \text{ gir}\right)$

$\underline{\underline{y = 1}}$

$$A = \int_0^1 1\,dx - \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = -\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 0 = \underline{\underline{\frac{7}{15}}} \approx 0{,}47$$

Alt.

$$= [x]_0^1 - \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x\right]_0^1$$

$$= (1-0) - \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 - 0\right)$$

$$= \cancel{1} - \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \cancel{1} = \underline{\underline{\frac{7}{15}}}$$

№2 a) $g(x) = \dfrac{2x-3}{2x+3}$; $2x+3 \neq 0$ $2x \neq -3 \,|\, :2$

dvs. $\underline{\underline{x \neq -\frac{3}{2}}}$ (D_g)

Skjæring mellom g og

1) y-aksen $(x=0)$: $y = g(0) = \frac{-3}{3} = \underline{\underline{-1}}$

2) x-aksen $(y=0)$: $g(x) = 0$ når $2x-3 = 0$

dvs. $2x = 3$ og $\underline{\underline{x = \frac{3}{2}}}$

$$g'(x) = \frac{2\cdot(2x+3) - (2x-3)\cdot 2}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{4x+6-4x+6}{(2x+3)^2} = \underline{\underline{\frac{12}{(2x+3)^2}}}$$

umulig

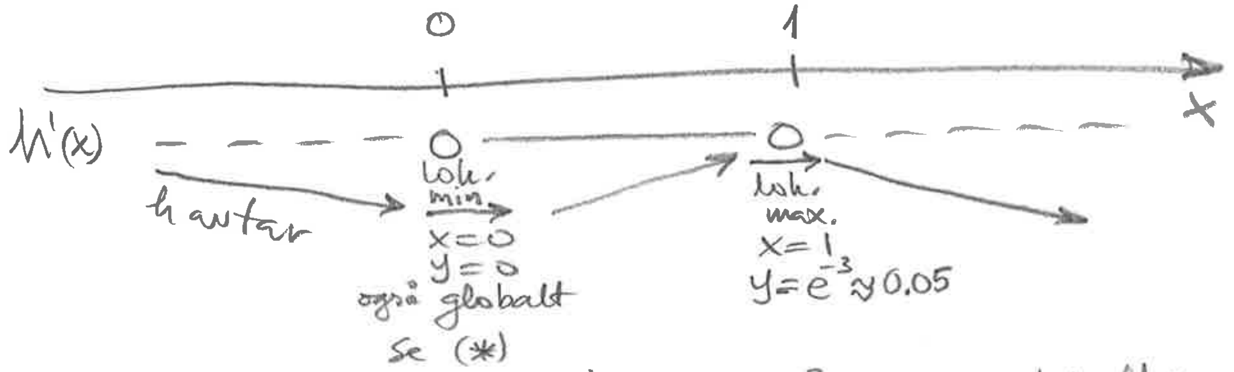
Ekstrempkt? $g'(x) \neq 0 \rightarrow 12 \neq 0 \rightarrow$ <u>Ingen ekstrempkt</u>

b) $h(x) = x^2 e^{-(2x+1)}$ NB! $h(x) \geq 0$ for alle x (*)

dvs. globalt min. i $x=0$

$$h'(x) = 2x e^{-(2x+1)} + x^2 e^{-(2x+1)} \cdot (-2)$$

$$= (2x - x^2) e^{-(2x+1)} = \underline{\underline{2x(1-x)e^{-(2x+1)}}} \quad \text{ok!}$$



f. eks. $x=-1$: $y = h(-1) = e > e^{-3} \rightarrow$ Kun lokalt max når $x=1$.

$$\int_0^1 (2x - x^2) e^{-(2x+1)}\, dx = \Big[h(x)\Big]_0^1$$

$$= e^{-3} - 0 = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \approx \underline{\underline{0.05}}$$

№3

a) $K_0 = 35000$, $r = 0.0175$

$K_1 = 35000 \cdot 1.0175 = \underline{\underline{35613}}$

$K_2 = 35000 \cdot 1.0175^2 = \underline{\underline{36235.7}}$

$K_4 = 35000 \cdot 1.0175^4 = \underline{\underline{37515}}$

Finn n slik at: $35000 \cdot 1.0175^n = 40000$

dvs. $1.0175^n = \frac{40}{35} \rightarrow n = \frac{\ln(40/35)}{\ln 1.0175} = \underline{7.69\ldots}$

dvs. $\underline{\underline{\text{minst 8 hele år}}}$

Finn r slik at:

$$K_0 = 1600000 \xrightarrow{r?} K_4 = 1100000$$

$$K_4 = K_0(1-r)^4 \rightarrow (1-r)^4 = \frac{11}{16} \quad \Big|\ \sqrt[4]{\ }$$

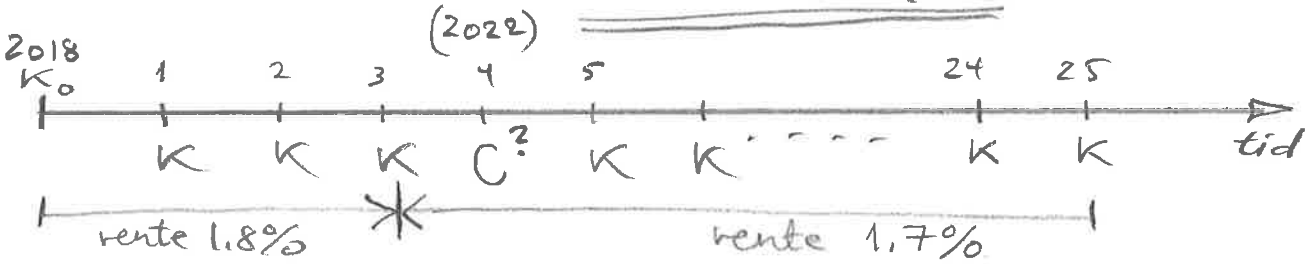
$$1 - r = \sqrt[4]{\frac{11}{16}} \rightarrow r = 1 - \sqrt[4]{\frac{11}{16}} = \underline{\underline{0.0894}}$$

snitt årlig verditap: 8,94%

b) Lån 2018: $K_0 = 1900000$, $r = 0.018$, $n = 25$

Årlig betaling: $K = 1900000 \cdot \frac{0.018 \cdot 1.018^{25}}{1.018^{25} - 1}$

$$\underline{\underline{K = 95048.87}}$$



Nåverdi (i 2022) av siste 21 betalinger:

$$N = 95048.87 \, \frac{1.017^{21} - 1}{0.017 \cdot 1.017^{21}} = 1666847.73$$

Restgjeld i 2022, ett år etter 3. betaling:

$$R = \left(K_0 \cdot 1.018^3 - K \, \frac{1.018^3 - 1}{0.018}\right) \cdot 1.017$$

$$= 1714147.84 \cdot 1.017 = 1743288.35$$

Betaling i 2022: $C = R - N = \underline{\underline{76440.62}}$

№ 4 $h(x,y) = 3 - 6x + 7x^2 + y^2 - 4xy$

a) Partielle deriverte av

1. orden: $\frac{\partial h}{\partial x} = -6 + 14x - 4y$ $\qquad \frac{\partial h}{\partial y} = 2y - 4x$

2. orden: $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \overset{A}{=} 14$ $\qquad B \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = -4$

$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = -4$ $\qquad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \overset{C}{=} 2$

st.pkt: $-6 + 14x - 4y = 0$ $\qquad 14x - 8x = 6 \rightarrow x = 1$

og $2y - 4x = 0 \rightarrow y = 2x$ $\qquad \underline{\underline{y = 2}}$

Klassifisering:

$\Delta = AC - B^2 = 14 \cdot 2 - (-4)^2 = 28 - 16 = 12 > 0$
$A = 14 > 0$ $\Big\}$ $\underline{\underline{\text{lokalt minimum}}}$

b) $(y-2x)^2 + 3(x-1)^2 = y^2 - 4xy + 4x^2 + 3x^2 - 6x + 3$
$= 3 - 6x + 7x^2 + y^2 - 4xy = \underline{\underline{h(x,y)}}$ ok

dvs. $h(x,y) = \underset{0,\,pos}{(\quad)^2} + 3\underset{0,\,pos}{(\quad)^2} = \begin{cases} pos \\ 0 \end{cases}$ dvs. $h(x,y) \geq 0$ for alle (x,y)

altså, h har globalt minimum når:

$y - 2x = 0$ og $x - 1 = 0 \rightarrow \underline{\underline{x = 1 \text{ og } y = 2}}$
st. pkt.

Bibetingelse: $x - y = 1 \rightarrow y = x - 1$

Innsatt i $h(x,y) = 3 - 6x + 7x^2 + (x-1)^2 - 4x(x-1)$
$= 3 - 6x + 7x^2 + x^2 - 2x + 1 - 4x^2 + 4x$
$= 4x^2 - 4x + 4 = g(x)$

Ekstrempkt: $g'(x) = 8x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$
$g''(x) = 8 > 0$ g konveks

min.

$g(x)$ har minimum når $x = \frac{1}{2}$, $y = x - 1 = -\frac{1}{2}$

Konklusjon,

Minimum $z = h(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \underline{\underline{3}}$

MAT1000 24.11.2022

Oppg. 1 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

$f(2) = 2^4 - 4\cdot 2^3 + 4\cdot 2^2$
$= 16 - 32 + 16 = 0$

$f(-1) = (-1)^4 - 4\cdot(-1)^3 + 4(-1)^2$
$= 1 + 4 + 4 = 9$

a)

x	-1	0	1	2	3	4
y	9	0	1	0	9	64

Vis $f(x) = (x^2 - 2x)^2$

$(x^2 - 2x)^2 = x^4 - 2\cdot x^2 \cdot 2x + (2x)^2$ 2. kv. setn.

$= \underline{x^4 - 4x^3 + 4x^2}$

(Evt. $(x^2-2x)(x^2-2x) = x^4 - 2x^3 - 2x^3 + 4x^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$)

Nullpunkt $(x^2 - 2x)^2 = 0$

$(x^2 - 2x) = 0$

$x(x-2) = 0$

$\underline{x = 0}$ eller $\underline{x = 2}$

b) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 3x + 2)$

Faktorisering $x^2 - 3x + 2 = 0$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$

$x_1 = 2 \quad x_2 = 1$

$f'(x) = 4x(x-1)(x-2)$

		0		1		2	
$4x$	−	0	+		+		+
$x-1$	−		−	0	+		+
$x-2$	−		−		−	0	+
f'	−		+		−		+
	Avtg		Voks.		Avtg		Voks.

f er avtagende for $x<0$ og $1<x<2$

f er voksende for $0<x<1$ og $x>2$

Lokale min. pkt. $(0,0)$ og $(2,0)$

Lokalt maks. pkt. $(1,1)$

De lokale min. punktene er også globale siden $f(x) \geq 0$ for alle x. Ingen globale maks. siden $y \to \infty$ når $x \to \pm\infty$.

c) $f''(x) = 4\cdot 3x^2 - 12\cdot 2x + 8 = 12x^2 - 24x + 8$

$f''(x) = 4(3x^2 - 6x + 2)$

Faktorisering $3x^2 - 6x + 2 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 3\cdot 2}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$x_1 = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 1.58$

$x_2 = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} \approx 0.42$

$f''(x) = 4\cdot 3(x - 1.58)(x - 0.42)$

3

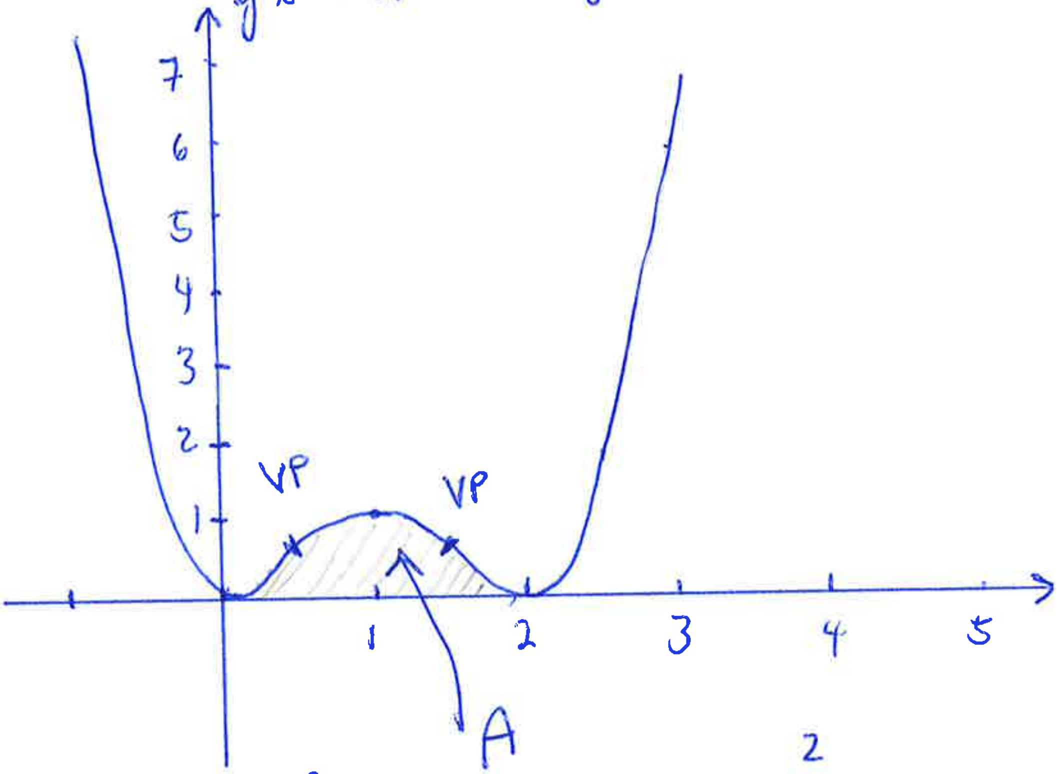
		0.42		1.58	
$x-1.58$	- - - -		- - - -		——
$x-0.42$	- - - -		——		——
f''	+		−		+
	Konveks		Konkav		Konveks

Konveks for $x < 0.42$ og $x > 1.58$

Konkav $0.42 < x < 1.58$

Vendepunkt $x \approx 0.42$ $\quad$ $x = 1.58$

$y \approx 0.44$ $\quad$ $y \approx 0.44$



d)

$$A = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x^4 - 4x^3 + 4x^2\,dx = \Big|_0^2 \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3$$

$$= \frac{1}{5}2^5 - 2^4 + \frac{4}{3}2^3 - 0 = \frac{32}{5} - 16 + \frac{4}{3}\cdot 8 = \frac{32}{5}\cdot\frac{3}{3} - 16\cdot\frac{15}{15} + \frac{4}{3}8\cdot\frac{5}{5}$$

$$= \frac{96 - 16\cdot 15 + 4\cdot 8\cdot 5}{15} = \frac{96 - 240 + 160}{15} = \frac{16}{15} = \underline{1.0667}$$

Oppg. 2

$$g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

a)

x	-2	-1	0	1	2	± 3
y	0.135	0.607	1	0.607	0.135	0.011

$g(-2) = e^{-\frac{1}{2}(-2)^2} = e^{-2} = 0.135$

$g(-1) = e^{-\frac{1}{2}(-1)^2} = e^{-\frac{1}{2}} = 0.61$

$$g'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(-\tfrac{1}{\cancel{2}}\cdot \cancel{2}x\right) = -x e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

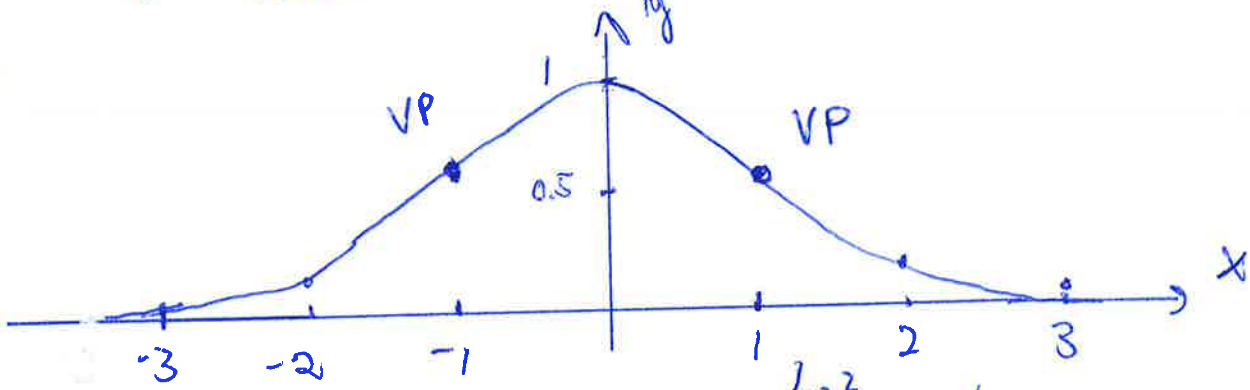
		0	
$-x$	$+$	0	$-$
$e^{-\frac{1}{2}x^2}$	$+$		$+$
g'	$+$ Voks.		$-$ Avtg.

g er voksende for $x < 0$

g er avtagende for $x > 0$

Globalt maksimum $(0, 1)$

b)



$$g''(x) = (-1)e^{-\frac{1}{2}x^2} + (-x)e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(-\tfrac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}x\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2}(-1 + x^2) = \underline{(x^2-1)e^{-\frac{1}{2}x^2}} = (x+1)(x-1)e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

		-1		1	
$x+1$	$-$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$+$
$e^{-\frac{1}{2}x^2}$	$+$		$+$		$+$
g''	$+$ Konveks		$-$ Konkav		$+$ Konveks

Konveks $x < -1$ og $x > 1$

Konkav $-1 < x < 1$

Vendepunkter $(-1, 0.61)$ $(1, 0.61)$

Oppg. 3

(5)

a) $K_0 = 50\,000$ kr $\quad r = 1.5\% = 0.015$ årlig

$$K_3 = K_0(1+r)^3 = 50\,000 \cdot 1.015^3 = \underline{52\,283.92 \text{ kr}}$$

$$K_{10} = K_0(1+r)^{10} = 50\,000 \cdot 1{,}015^{10} = \underline{58\,027.04 \text{ kr}}$$

$$50\,000\,(1+r)^{10} = 60\,000$$

$$(1+r)^{10} = \frac{60\,000}{50\,000} = 1{,}20$$

$$(1+r) = \sqrt[10]{1{,}20} = 1{,}0184$$

$$r = \underline{0.0184 = 1{,}84\,\%}$$

Verdi av bil $\quad V_0 = 550\,000$ kr

1. år 20% tap
2. år 10 % tap
3. år 10 % tap

Etter 3 år

$$V_3 = V_0 \cdot 0.80 \cdot 0{,}90 \cdot 0.90 = 550\,000 \cdot 0.80 \cdot 0{,}90^2$$
$$= \underline{356\,400 \text{ kr}}$$

Gjennomsnittlig årlig prosentvis tap

$$550\,000 \cdot p^3 = 356\,400$$

$$p^3 = \frac{356\,400}{550\,000} = 0.648$$

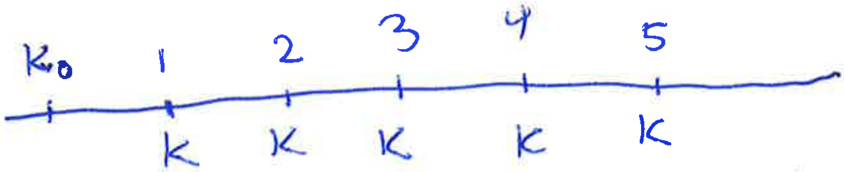
$$p = \sqrt[3]{0.648} = 0.865$$

Gj. sn. prosentvis tap $\quad 1 - 0.865 = 0.135 = \underline{13.5\,\%}$

b) $K_0 = 500\,000$ kr lån $r = 4.5\% = 0.045$ $n = 5$ år 6

Årlig beløp

$$K = K_0 \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = 500\,000 \frac{0.045 \cdot 1.045^5}{1.045^5 - 1} = \underline{113\,895.82 \text{ kr}}$$



Må finne restlån R_3 når 3. beløp skal betales.

Enten nåverdi av 3 siste betalinger

$$R_3 = K + \frac{K}{1+r} + \frac{K}{(1+r)^2} = 113\,895.82\left(1 + \frac{1}{1.045} + \frac{1}{1.045^2}\right)$$

$$= \underline{327\,184.85 \text{ kr}}$$

eller verdi av lånet etter to nedbetalinger og et år med renter

Restlån før 2. betaling

$$R_2 = (K_0(1+r) - K)(1+r) = (500\,000 \cdot 1.045 - 113\,895.82)1.045$$

$$= 426\,991.37$$

Restlån før 3. betaling

$$(R_2 - K)(1+r) = (426\,991.37 - 113\,895.82)\,1.045$$

$$= \underline{327\,184.85 \text{ kr}}$$

Oppg. 4

$$h(x,y) = x^2y - xy - x + 1$$

a) $\frac{\partial h}{\partial x} = 2xy - y - 1$ $\quad \frac{\partial h}{\partial y} = x^2 - x$

$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 2y \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = 2x-1 \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 2x-1 \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$

Stasjonære punkter

1) $2xy - y - 1 = 0$

2) $x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \quad x = 0, x = 1$ Settes inn i 1)

$x = 0 \quad 2 \cdot 0 \cdot y - y - 1 = 0 \quad y = -1 \quad (0,-1)$

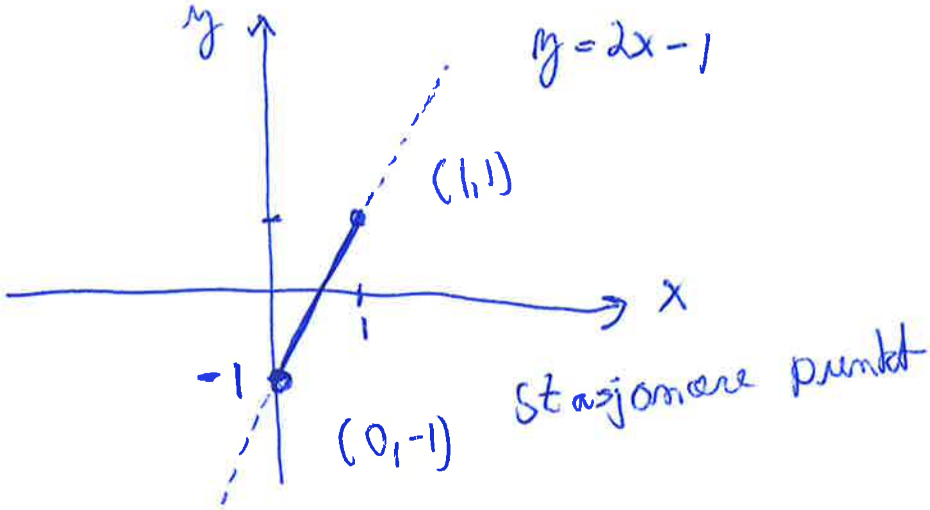
$x = 1 \quad 2 \cdot 1 \cdot y - y - 1 = 0 \quad y = 1 \quad (1,1)$

To stasjonære punkter $(0,-1)$ og $(1,1)$

Klassifisering

	$A = 2y$	$B = 2x-1$	$C = 0$	$\Delta = A \cdot C - B^2$
$(0,-1)$	-2	-1	0	$\Delta = (-2) \cdot 0 - (-1)^2 = -1$
$(1,1)$	2	1	0	$\Delta = 2 \cdot 0 - 1^2 = -1$

Siden $\Delta < 0$, er begge sadelpunkter b)



Linja gjennom $(0,-1)$ og $(1,1)$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - (-1) = \frac{1 - (-1)}{1 - 0}(x - 0)$$

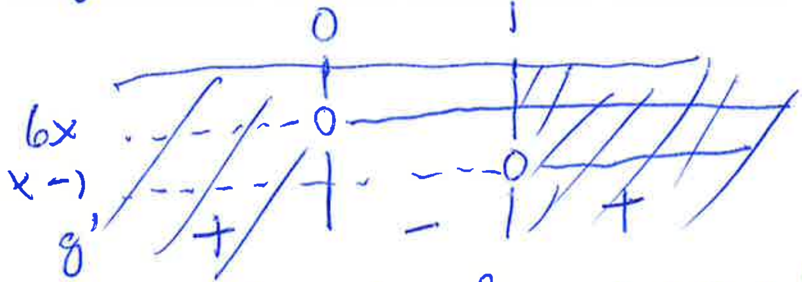
$$y + 1 = 2x \qquad \underline{y = 2x - 1}$$

$$z = h(x, 2x-1) = x^2(2x-1) - x(2x-1) - x + 1$$

$$z = 2x^3 - x^2 - 2x^2 + x - x + 1 \qquad 0 \le x \le 1$$

$$z = 2x^3 - 3x^2 + 1 = g(x)$$

$$g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$



g er avtagende når $0 \le x \le 1$

Maks. i $x = 0$ $\quad y = -1 \quad z = 2\cdot 0^3 - 3\cdot 0^2 + 1 = 1$

Min. i $x = 1$ $\quad y = 1 \quad z = 2\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2 + 1 = 0$

MAT 1000 2. 03. 2023

(1)

Oppg. 1 $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

a) $f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - (-2) - 1 = -8 + 4 + 2 - 1 = -3$

$f(\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3})^3 + (\frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 1 = \frac{1+3-9-27}{27} = -\frac{32}{27} = -1,185$

x	-2	-1	0	$\frac{1}{3}$	1	2
y	-3	0	-1	$-\frac{32}{27}$	0	9

$(x^2-1)(x+1) = x^3 + x^2 - x - 1 = f(x)$

$f(x) = (x^2-1)(x+1) = (x+1)(x+1)(x-1) = (x+1)^2(x-1)$

Nullpunkter $x = -1$ $x = 1$

		-1		1	
$(x+1)^2$	———	0	———		———
$x-1$	- - - -		- - - -	0	———
$f(x)$	−		−		+

f er positiv for $x > 1$, negativ for $x < -1$ og $-1 < x < 1$

b) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$
$= 3(x - \frac{1}{3})(x + 1)$

$3x^2 + 2x - 1 = 0$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{6}$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6}$

$x_1 = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}$

$x_2 = \frac{-2-4}{6} = -1$

		-1		$\frac{1}{3}$	
$x - \frac{1}{3}$	- - - -		- - - -	0	———
$x+1$	- - - -	0	———		———
f'	+		−		+
	Voks.		Avtg.		Voks.

②

f er voksende for $x < -1$ og for $x > \frac{1}{3}$

f er avtagende for $-1 < x < \frac{1}{3}$

Lokalt maks. $x = -1 \quad y = 0$

Lokalt min. $x = \frac{1}{3} \quad y \approx -\frac{32}{27} = -1{,}185$

Ingen globale ekstrempunkter fordi $x^3 \to \pm\infty$ for $x \to \pm\infty$

c) $f''(x) = 6x + 2 = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)$

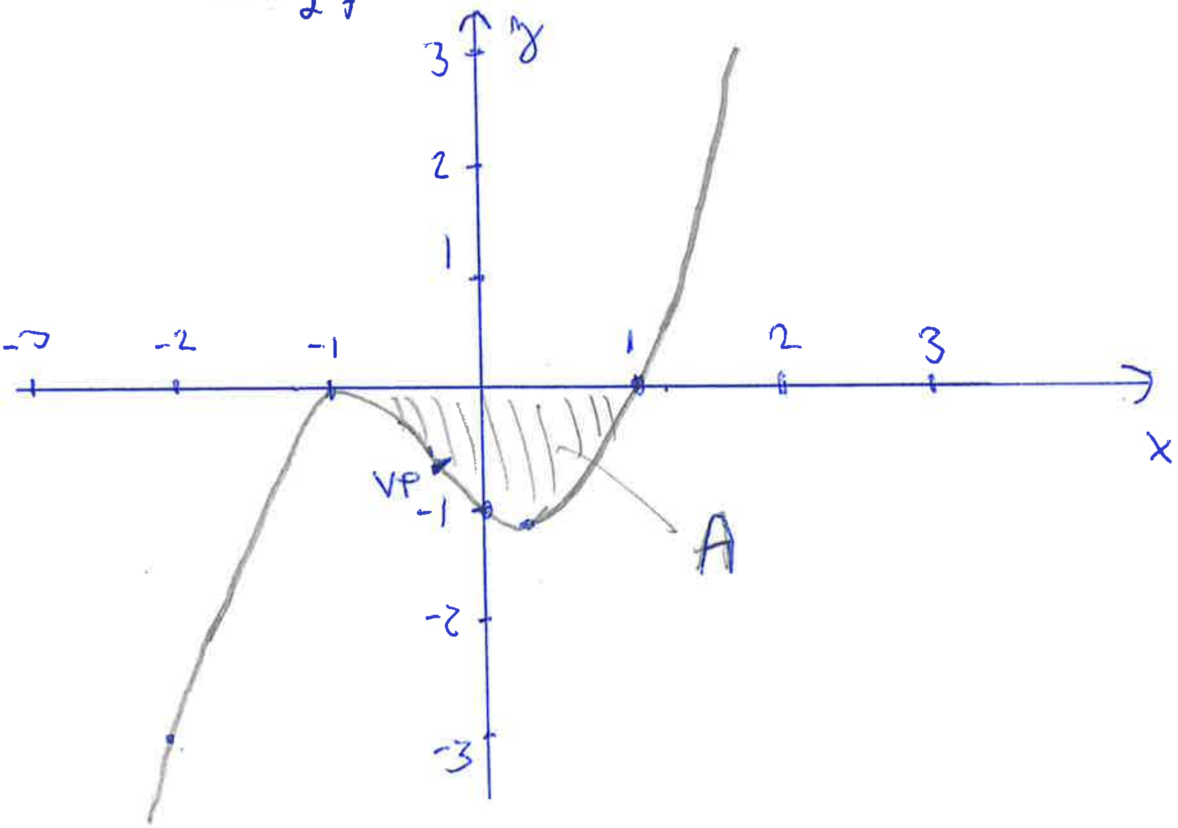
$f'' > 0$ for $x > -\frac{1}{3}$ Konveks.

$f'' < 0$ for $x < -\frac{1}{3}$ Konkav

$x = -\frac{1}{3}$ er vendepunkt

$$f\left(-\tfrac{1}{3}\right) = \left(-\tfrac{1}{3}\right)^3 + \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 - \left(-\tfrac{1}{3}\right) - 1 = -\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1$$

$$= \frac{-1 + 3 + 9 - 27}{27} = \frac{-16}{27} = -0{,}593$$



d) 3

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^3 + x^2 - x - 1 \; dx$$

$$= \Big|_{-1}^{1} \; \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$$

$$= \left(\cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{2}} - 1 \right) - \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{2}} - (-1) \right)$$

$$= \frac{2}{3} - 1 - 1 = -\frac{4}{3}$$

(neg. fordi arealet ligger under x-aksen)

$$A = \frac{4}{3}$$

Oppg. 2

$$g(x) = \frac{x-2}{x+1}$$

a) Definert for alle $x \neq -1$

Skjæring med aksene

y-aksen : $x = 0 \quad y = \frac{0-2}{0+1} = -2 \qquad (0,-2)$

x-aksen : $y = \frac{x-2}{x+1} = 0 \quad x = 2 \qquad (2,0)$

$$g'(x) = \frac{1\cdot(x+1) - (x-2)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+2}{(x+1)^2} = \underline{\frac{3}{(x+1)^2}}$$

Ingen ekstrempunkter fordi $g'(x) > 0$ for alle $x \neq -1$

b) $h(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right)$ $\qquad$ h er definert når $\frac{x-2}{x+1} > 0$

h er ikke definert for

$-1 \leq x \leq 2$

	−1		2	
$x-2$	− − −	− − − −		
$x+1$	− − −			
h	+	−		+
		Ikke def.		

$$h'(x) = \frac{1}{\frac{x-2}{x+1}} \cdot \left(\frac{x-2}{x+1}\right)' = \frac{1}{\frac{x-2}{\cancel{x+1}}} \frac{3}{(x+1)^{\cancel{2}}} \qquad (\text{fra a})$$

$$h'(x) = \frac{3}{(x-2)(x+1)}$$

Kan ikke bli 0.
Ingen ekstrempunkter
$h'(x) > 0$ i definisjonsområdet

(Evt. $h(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = \ln(x-2) - \ln(x+1)$

$h'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} = \frac{3}{(x-2)(x+1)}$)

Oppg. 3

(5)

$K_0 = 20\,000$ kr $\quad r = 0.025 = 2{,}5\,\%$ årlig

a) $K_1 = 20\,000 \cdot 1.025 = \underline{20\,500 \text{ kr}}$

$K_5 = 20\,000 \cdot 1.025^5 = \underline{22\,628.16 \text{ kr}}$

$K_{10} = 20\,000 \cdot 1.025^{10} = \underline{25\,601.69 \text{ kr}}$

$20\,000 \cdot 1.025^n = 30\,000 \qquad 1.025^n = 1.5 \qquad |\text{ Ta } \ln$

$n \ln 1.025 = \ln 1.5$

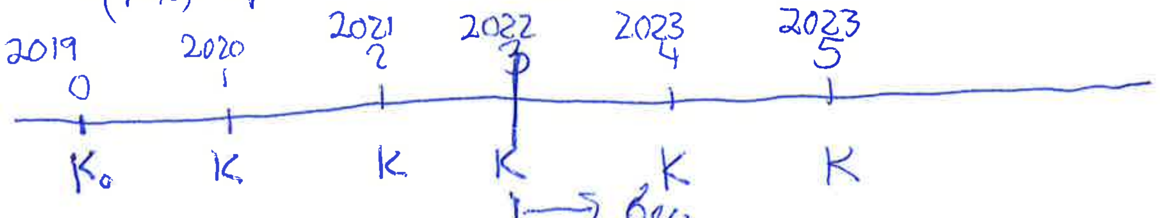
$n = \dfrac{\ln 1.5}{\ln 1.025} = \underline{16.4 \text{ år}}$

$20\,000(1+r)^{10} = 30\,000 \qquad (1+r)^{10} = 1{,}5$

$1+r = \sqrt[10]{1{,}5} = 1.0414 \qquad r = 1.0414 - 1 = 0.0414 = \underline{4{,}14\,\%}$

b) $K_0 = 400\,000$ lån $\quad r = 5\,\% = 0.05$ årlig $\quad n = 5$ år

$K = K_0 \dfrac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} = 400\,000 \dfrac{0.05 \cdot 1.05^5}{1.05^5 - 1} = 92\,389.92$ kr $\quad$ Årlig beløp



Må finne lånesaldo etter 3. betaling i 2022

$400\,000 \cdot 1.05 - K = 327\,610.08 \qquad$ 2020

$327\,610.08 \cdot 1.05 - K = 251\,600.66 \qquad$ 2021

$251\,600.66 \cdot 1.05 - K = \underline{171\,790.78} \qquad$ 2022 $\quad$ Saldo etter 3. bet.

Ny rente 6 %.

Nytt årlig beløp

$C = 171\,790.78 \dfrac{0.06 \cdot 1.06^2}{1.06^2 - 1} = \underline{93\,701.03 \text{ kr}}$

(+ 1311 kr)

Oppg. 4

$h(x,y) = xy - x^2y + 2x^3$

a)

$h_x = \frac{\partial h}{\partial x} = y - 2xy + 6x^2$ $\quad h_y = \frac{\partial h}{\partial y} = x - x^2$

$h_{xx} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -2y + 12x$ $\quad h_{xy} = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = 1 - 2x = h_{yx} = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$ $\quad h_{yy} = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$

Stasjonære punkter

$h_x = y - 2xy + 6x^2 = 0$ $\qquad h_y = x - x^2 = x(1-x) = 0$

$x = 0 \qquad x = 1$

$x = 0$

$y - 2\cdot\cancel{0 y} + \cancel{6\cdot 0^2} = 0 \qquad y = 0$ $\qquad (0,0)$

$x = 1$

$y - 2\cdot 1 y + 6\cdot 1^2 = 0$

$-y + 6 = 0$

$y = 6$ $\qquad (1,6)$

Klassifisering

$A = -2y + 12x \qquad B = 1 - 2x \qquad C = 0 \qquad \Delta = A\cdot C - B^2$

(0,0)	$A = 0$	$B = 1$	$C = 0$	$\Delta = 0\cdot 0 - 1^2 = -1$ Sadelpunkt
(1,6)	$A = -2\cdot 6 + 12\cdot 1 = 0$	$B = 1 - 2\cdot 1 = -1$	$C = 0$	$\Delta = 0\cdot 0 - (-1)^2 = -1$ Sadelpunkt

Begge punktene er sadelpunkter.

b) Minimer

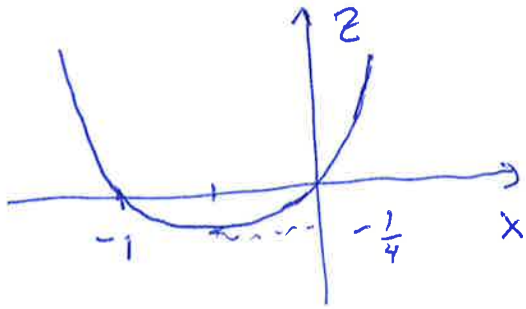
$$z = h(x,y) = xy - x^2y + 2x^3$$

når $y - 2x = 1$ $\quad y = 2x+1$

$$z = g(x) = h(x, 2x+1) = x(2x+1) - x^2(2x+1) + 2x^3$$

$$g(x) = 2x^2 + x \cancel{-2x^3} - x^2 \cancel{+2x^3}$$

$$\underline{g(x) = x^2 + x}$$



$$g'(x) = 2x+1 = 2\left(x+\tfrac{1}{2}\right)$$

Minimum for

$$x = -\tfrac{1}{2}$$

$$y = 2x+1 = 2\left(-\tfrac{1}{2}\right)+1 = 0$$

$$z = g\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{4}$$

g har min. når $y = 2x+1$

i $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ $\quad z = -\frac{1}{4}$

Oppgave 1

Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

a) Regn ut funksjonsverdiene til følgende x-verdier: $-3, -1, 1, 4$.

Funksjonsverditabell:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-25	0	9	8	3	0	5	24

Resten er beregnet på kalkulator.

Regner ut én y-verdi detaljert: Ser på $x = -3$

$$y = f(-3) = (-3)^3 - 2\cdot(-3)^2 - 4\cdot(-3) + 8$$
$$= -27 - 2\cdot 9 + 12 + 8 = -27 - 18 + 20 = \underline{\underline{-25}}$$

Vis at $f(x)$ kan skrives som

$$f(x) = (x^2-4)(x-2)$$

Multipliser ut på høyresiden:

$$(x^2-4)(x-2)$$
$$= x^3 - 2\cdot x^2 - 4\cdot x - 4\cdot -2$$
$$= x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = f(x)$$ **Ok!**

Bestem nullpunktene til f

Søker x slik at: $y = f(x) = 0$

Løsning? Produkt = 0 → Faktorisering av $f(x)$

dvs. $f(x) = 0$ *når* $(x^2-4)(x-2) = 0$

NB! 3.KVS på første parentes

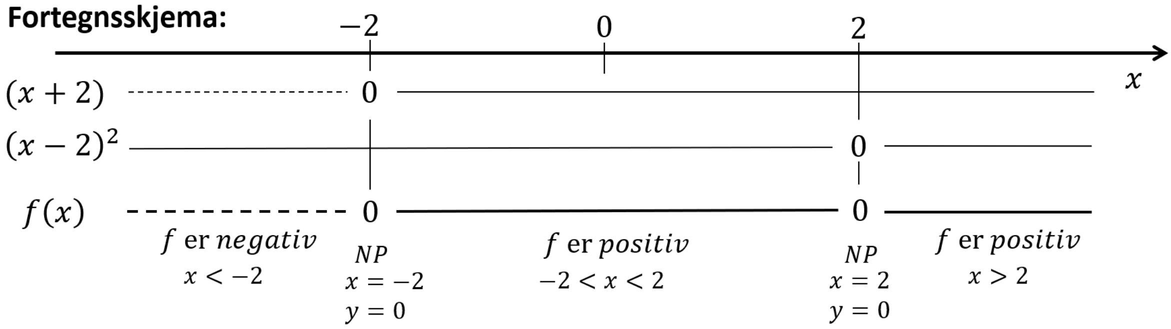
$$(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x-2) = 0$$

altså *når* $\underline{\underline{x = -2}}$ eller *når* $\underline{\underline{x = 2}}$

Avgjør hvor funksjonen er positiv og hvor den er negativ.

Faktorisering: $f(x) = (x^2-4)(x-2) = (x+2)\cdot(x-2)\cdot(x-2) = (x+2)\cdot(x-2)^2$

Fortegnsskjema:



b) Bestem $f'(x)$. $f'(x) = 3\cdot x^{3-1} - 2(2\cdot x^{2-1}) - 4\cdot 1 + 0 = \underline{\underline{3x^2 - 4x - 4}}$

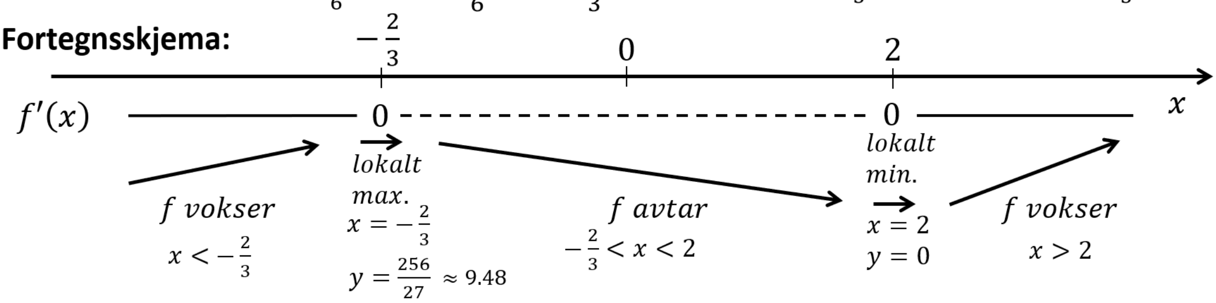
Avgjør hvor funksjonen f er voksende og hvor den er avtagende.

Finn lokale ekstrempunkt for f og avgjør om noen av dem er globale.

Ekstrempkt.? $f'(x) = 0$? $3x^2 - 4x - 4 \overset{?}{=} 0$ *dvs.* $x = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 3\cdot(-4)}}{2\cdot 3}$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6} = \frac{2 \pm 4}{3}$ Da er $x = \frac{2+4}{3} = 2$, eller $x = \frac{2-4}{3} = -\frac{2}{3}$

Fortegnsskjema:

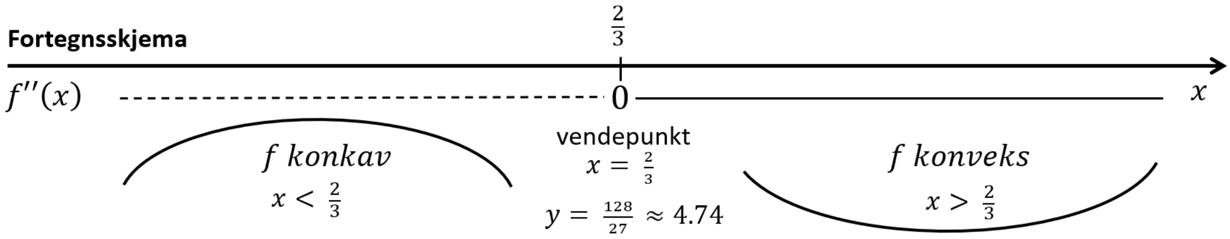


Fra tabellen i pkt a) ser vi f.eks. at $y = -25$ når $x = -3$, og er da mindre enn $y = 0$ i lokalt min. Videre er $y = 24$ når $x = 4$, og er da større enn $y = 9.48$ i lokalt max. Altså har <u>ikke</u> f noen globale ekstrempunkt.

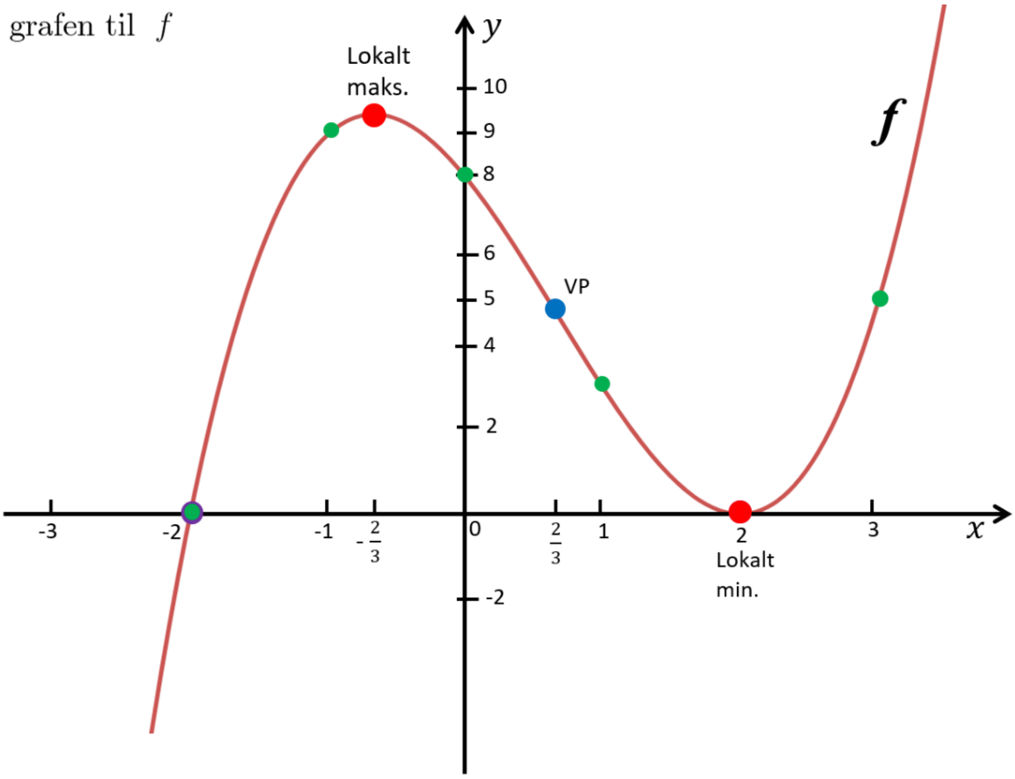
c) Bestem $f''(x)$. $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 \rightarrow f''(x) = 3 \cdot 2x^{2-1} - 4 \cdot 1 - 0 = \underline{\underline{6x - 4}}$

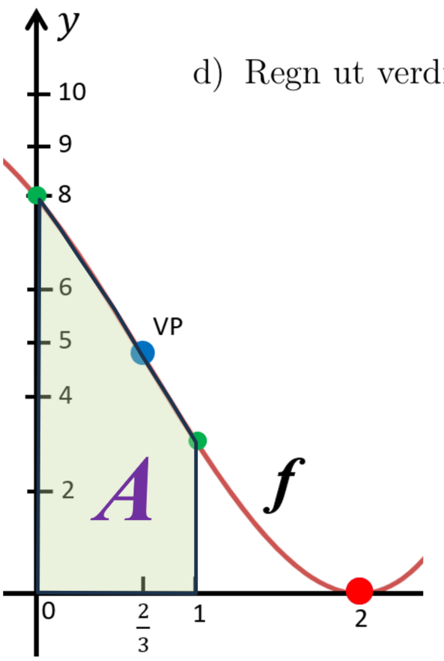
Avgjør hvor grafen til f er konkav, og hvor den er konveks og finn vendepunktene til f.

Vendepunkt: $f''(x) \overset{?}{=} 0 \rightarrow 6x - 4 = 0 \rightarrow 6x = 4$ dvs. $x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$



Skisser grafen til f





d) Regn ut verdien: $A = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 - 4x + 8)\, dx$

$$A = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 8x\right]_0^1$$

$$= \left(\tfrac{1}{4} \cdot 1^4 - \tfrac{2}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1\right) - 0$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - 2 + 8 = \frac{1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + 6 \cdot 12}{4 \cdot 3} = \underline{\underline{\frac{67}{12}}} \approx 5.58$$

A kan tolkes som størrelsen på et område. Merk av dette området på grafskissen.

Oppgave 2

a) Deriver de tre funksjonene:

i) $f(x) = e^{2x}$

ii) $g(x) = (2x-1)\,e^{x}$

iii) $h(x) = x - 1 + \ln(2x-1)$

i) $f'(x) = e^{2x}\cdot(2x)' = e^{2x}\cdot 2 = \underline{\underline{2e^{2x}}}$

ii) $g'(x) = (2x-1)'\cdot e^{x} + (2x-1)\cdot(e^{x})'$

$= 2\cdot e^{x} + (2x-1)\cdot e^{x}$

$= (2+2x-1)\cdot e^{x} = \underline{\underline{(2x+1)e^{x}}}$

iii) $h'(x) = (x-1)' + (\ln(2x-1))'$

$= 1 + \frac{1}{2x-1}\cdot(2x-1)'$

$= 1 + \frac{2}{2x-1} = \frac{2x-1}{2x-1} + \frac{2}{2x-1} = \underline{\underline{\frac{2x+1}{2x-1}}}$

b) For de tre funksjonene i punkt a)

i) Bestem både $f(0)$ og $f'(0)$.

ii) Finn skjæringspunktene mellom grafen til g og koordinataksene.

iii) Finn skjæringspunktet mellom grafen til h og den rette linja $y = x - 1$.

i) $f(x) = e^{2x}$

$f(0) = e^{2\cdot 0} = e^{0} = \underline{\underline{1}}$

$f'(x) = 2e^{2x}$

$f'(0) = 2e^{2\cdot 0} = 2e^{0} = 2\cdot 1 = \underline{\underline{2}}$

ii) $g(x) = (2x-1)e^{x}$

Skjæringspkt. med y-aksen (sett $x = 0$): $y = g(0) = (2\cdot 0 - 1)e^{0} = (0-1)\cdot 1 = -1$

Skjæringspkt. med x-aksen (sett $y = 0$): $y = g(x) = (2x-1)e^{x} = 0$ NB! $e^{x} \neq 0$

$2x - 1 = 0 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

Skjæringspkt. med aksene er altså: $\underline{\underline{(x,y) = (0,-1)}}$ og $\underline{\underline{(x,y) = (\frac{1}{2}, 0)}}$

iii) $h(x) = x - 1 + \ln(2x-1)$

Skjæringspkt. mellom h og linja $y = x - 1$: $y = h(x) = x - 1$

$x - 1 + \ln(2x-1) = x - 1 \rightarrow \ln(2x-1) = 0 \quad \Big| \; e^{()}$

$e^{\ln(2x-1)} = e^{0}$

$2x - 1 = 1$

$2x = 2$

$\underline{\underline{x = 1}}$

Kontroll:

Linja $y = 1 - 1 = 0$

$y = h(1) = 1 - 1 + \ln(2\cdot 1 - 1) = 0 + \ln 1 = 0$

Oppgave 3

a) Sondre har satt i banken et beløp på 125 000 kr til en rente på 3.5 % årlig. Hva er verdien av beløpet etter 2 år og etter 5 år?

Sluttverdi etter 2 år: $K_2 = 125000 \cdot 1.035^2 = \underline{\underline{133\,903.13}}$

Sluttverdi etter 5 år: $K_5 = 125000 \cdot 1.035^5 = \underline{\underline{148\,460.79}}$

Hvor mange år tar det før beløpet er vokst til 200 000 kr?

Søker antall år n slik at: $K_n = 125000 \cdot 1.035^n = 200000$

$$1.035^n = \frac{200000}{125000} = 1.6 \quad \Big| \, ln(\,)$$

$$n \cdot ln\,1.035 = ln\,1.6 \quad \longrightarrow \quad n = \frac{ln\,1.6}{ln\,1.035} \approx \underline{\underline{13.7}} \text{ (år)}$$

Hva måtte innsatt beløp ha vært for at verdien skulle være 200 000 kr etter 5 år?

Sluttverdi etter 5 år: $K_0 \cdot 1.035^5 = 200\,000$

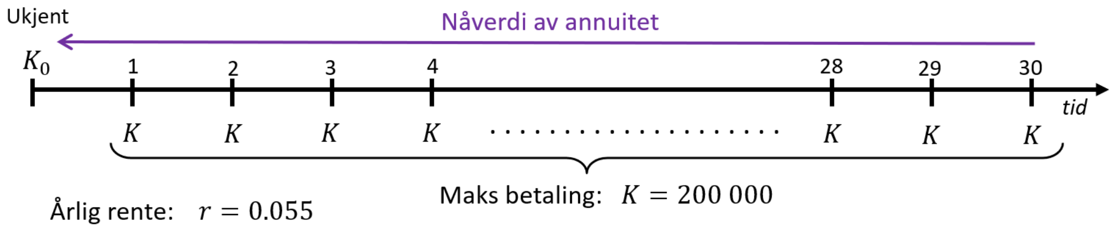
Nåverdi av 200 000 om 5 år: $K_0 = \dfrac{200\,000}{1.035^5} = \underline{\underline{168\,394.63}}$

b) Edna har lånt 2 400 000 kr til kjøp av bolig. Renten på lånet er 5.5 % årlig, og lånet betales over 30 år med like store årlige beløp, første gang var ett år etter låneopptaket. Hva er det årlige beløpet Edna betaler på lånet?

Årlig betaling K (via låneformelen): $K = K_0 \dfrac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$ $\left\{ \begin{array}{ll} \text{Lånet:} & K_0 = 2\,400\,000 \\ \text{Årlig rente:} & r = 0.055 \\ \text{Antall år:} & n = 30 \end{array} \right.$

Dvs. $K = 2\,400\,000 \cdot \dfrac{0.055 \cdot 1.055^{30}}{1.055^{30} - 1} = \underline{\underline{165\,132.94}}$

Sondre vurderer også å kjøpe seg bolig. Hans økonomi kan tåle et lån med en årlig betaling på maksimalt 200 000 kr. Årlig rente er 5.5 %, betalingstiden er 30 år og første betaling skjer ett år etter låneopptak. Hvor mye kan Sondre maksimalt låne til kjøp av bolig?



Årlig rente: $r = 0.055$
Antall år: $n = 30$
Årlig betaling: $K = 200\,000$

Maksimalt lånebeløp (nåverdi av annuitet): $K_0 = 200\,000 \cdot \dfrac{1.055^{30} - 1}{0.055 \cdot 1.055^{30}}$

$$K_0 = \underline{\underline{2\,906\,749.03}}$$

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x, y) = 9 - 2x^2 - 4y + 2xy$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.

Partielle deriverte av 1. orden: $\frac{\partial h}{\partial x} = -4x + 2y$ og $\frac{\partial h}{\partial y} = -4 + 2x$

2. orden: $\underbrace{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -4}_{A}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = 2 \underset{B}{=} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 2$, $\underbrace{\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0}_{C}$

Vis at h har kun ett stasjonært punkt: $(2, 4)$.

$\frac{\partial h}{\partial x} = -4x + 2y = 0 \xrightarrow{4} -4 \cdot 2 + 2y = 0 \xrightarrow{5} 2y = 8$, eller $y = 4$

og

$\frac{\partial h}{\partial y} = -4 + 2x = 0 \xrightarrow{1} 2x = 4 \xrightarrow{2} x = 2$ 3

Altså, ett stp.pkt: $\underline{\underline{(2, 4)}}$

Klassifiser det stasjonære punktet.

St.pkt	A	C	B	$\Delta = AC - B^2$	Type
$(2, 4)$	-4	0	2	$-4 \cdot 0 - 2^2 = -4$ $(\Delta < 0)$	<u>Sadelpunkt</u>

b) Finn funksjonsverdien i det stasjonære punktet for h.

$z = h(2, 4) = 9 - 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 4 = 9 - 8 - 16 + 16 = \underline{\underline{1}}$

Bestem maksimum for funksjonen h under bibetingelsen: $x + y = 6$.

Bibetingelsen kan omskrives til : $y = 6 - x$

Setter inn for y (substituerer) i h:

$z = h(x, y) = h(x, 6 - x) = 9 - 2x^2 - 4(6 - x) + 2x(6 - x)$

$= 9 - 2x^2 - 24 + 4x + 12x - 2x^2 = -4x^2 + 16x - 15 = g(x)$

$g'(x) = -8x + 16 = -8(x - 2) = 0$, dvs. $x = 2 \longrightarrow y = 6 - x = 6 - 2 = 4$

Minimum? Sjekk g'': $g''(x) = -8 < 0$, dvs. g er konkav og har maksimum

$g(2) = -4 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 - 15 = -16 + 32 - 15 = 1$ (kontroll)

Konklusjon - Maksimum for h under bibetingelsen: $\underline{\underline{z = h(2, 4) = 1}}$

Oppgave 1

Funksjonen f er gitt ved at: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

a) Regn ut funksjonsverdiene til følgende x-verdier: $-2,\ -1,\ 1,\ 4$.

Funksjonsverditabell:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-50	-16	0	4	2	0	4	20

Resten er beregnet på kalkulator.

Regner ut én y-verdi detaljert: Ser på $x = -2$

$$y = f(-2) = (-2)^3 - 3\cdot(-2)^2 + 4$$
$$= -8 - 3\cdot 4 + 4 = -8 - 12 + 4 = \underline{\underline{-16}}$$

Vis at $f(x)$ kan skrives som
$$f(x) = (x+1)(x-2)^2$$

Multipliser ut på høyresiden:

$(x+1)(x-2)^2$ NB! 2.KVS på andre parentes

$$= (x+1)(x^2 - 4x + 4)$$
$$= x^3 - 4x^2 + 4x + x^2 - 4x + 4$$
$$= x^3 - 3x^2 + 4 = f(x) \quad \textbf{Ok!}$$

Bestem nullpunktene til f

Søker x slik at: $y = f(x) = 0$

Løsning? Produkt $= 0$ → Faktorisering av $f(x)$

dvs. $f(x) = 0$ *når* $(x+1)\underbrace{(x-2)^2}_{} = 0$

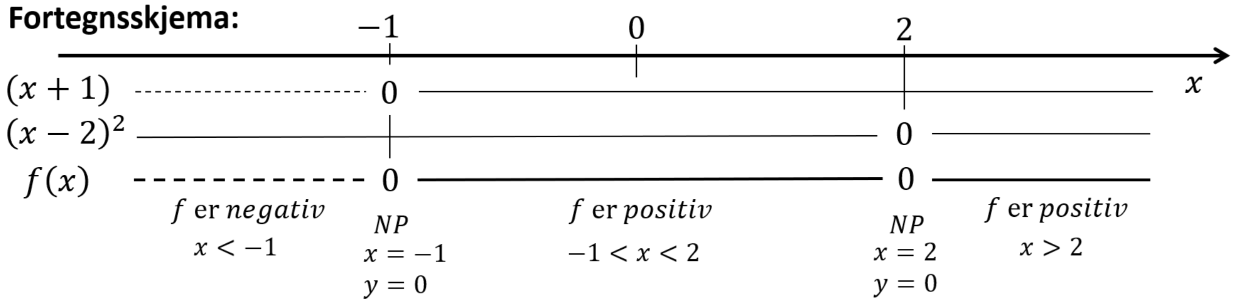
$$(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-2) = 0$$

altså *når* $\underline{\underline{x = -1}}$ eller *når* $\underline{\underline{x = 2}}$

Avgjør hvor funksjonen er positiv og hvor den er negativ.

Faktorisering: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2$

Fortegnsskjema:



b) Bestem $f'(x)$. $\quad f'(x) = 3\cdot x^{3-1} - 3(2\cdot x^{2-1}) + 0 = \underline{\underline{3x^2 - 6x}}$

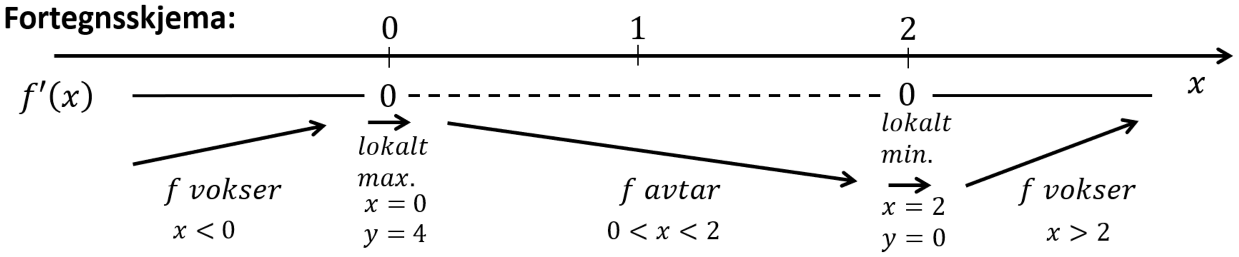
Avgjør hvor funksjonen f er voksende og hvor den er avtagende.

Finn lokale ekstrempunkt for f og avgjør om noen av dem er globale.

Ekstrempkt.? $f'(x) = 0$? $\quad 3x^2 - 6x = 0$? $\longrightarrow 3x\cdot(x-2) = 0$

Da er $x = 0$, eller $x = 2$

Fortegnsskjema:



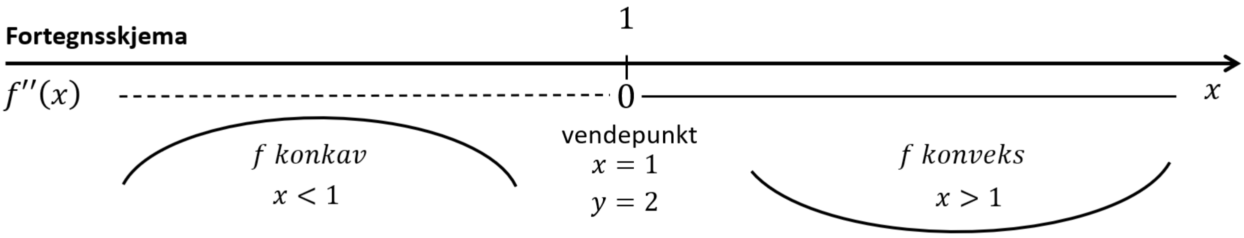
Fra tabellen i pkt a) ser vi f.eks. at $y = -16$ når $x = -2$, og er da mindre enn $y = 0$ i lokalt min.
Videre er $y = 20$ når $x = 4$, og er da større enn $y = 4$ i lokalt max. Altså har ikke f noen globale ekstrempunkt.

c) Bestem $f''(x)$. $f'(x) = 3x^2 - 6x \quad \rightarrow \quad f''(x) = 3 \cdot 2x^{2-1} - 6 \cdot 1 = \underline{\underline{6x - 6}}$

Avgjør hvor grafen til f er konkav, og hvor den er konveks og finn vendepunktene til f.

Vendepunkt: $f''(x) \stackrel{?}{=} 0 \rightarrow 6x - 6 = 0 \rightarrow 6x = 6$ dvs. $x = 1$

og $y = 2$ (fra tabellen i pkt. a)



Skisser grafen til f

Husk å kontrollere!

Fra pkt. a)

Først funksjonsverditabellen

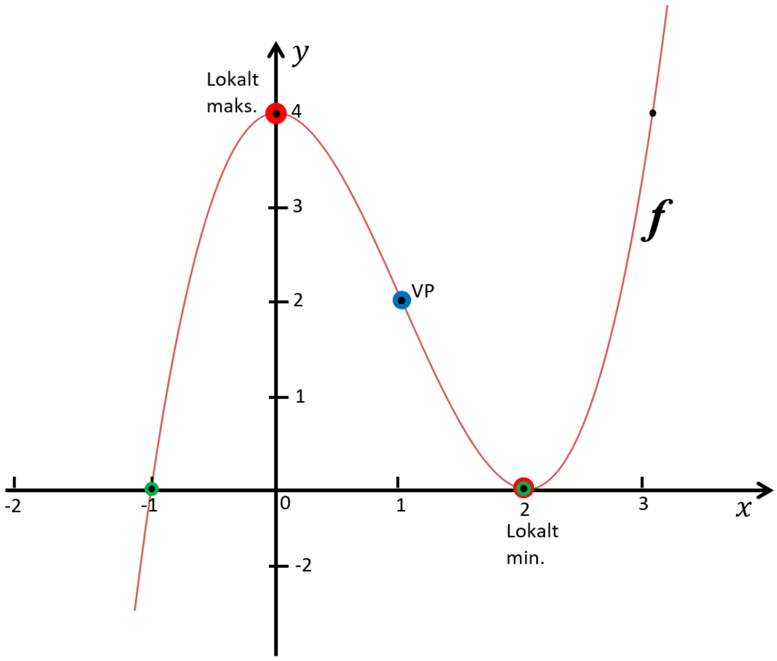
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-16	0	4	2	0	4	20

Så nullpunkt: $y = f(x) = 0$

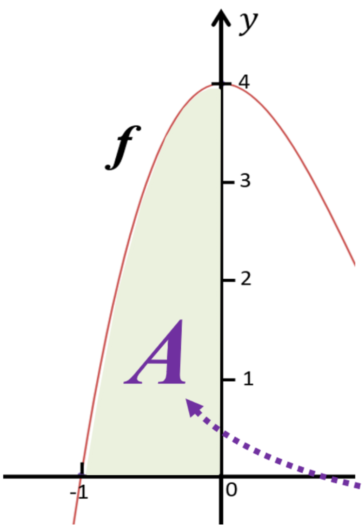
når $x = -1$, eller $x = 2$

Pkt. b): Info fra $f'(x)$

Pkt. c): Info fra $f''(x)$



d) Regn ut verdien: $A = \int_{-1}^{0} (x^3 - 3x^2 + 4)\, dx$



$$A = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x\right]_{-1}^{0}$$

$$= 0 - \left(\tfrac{1}{4} \cdot (-1)^4 - (-1)^3 + 4 \cdot -1\right)$$

$$= -\left(\tfrac{1}{4} + 1 - 4\right)$$

$$= -\tfrac{1}{4} + 3 = \underline{\underline{\tfrac{11}{4} = 2.75}}$$

A kan tolkes som størrelsen på et område. Merk av dette området på grafskissen.

Oppgave 2

a) Deriver de tre funksjonene:

i) $f(x) = e^{3x}$

ii) $g(x) = (3x+1)\,e^{x}$

iii) $h(x) = 2x + \ln(x+2)$

i) $f'(x) = e^{3x} \cdot (3x)' = e^{3x} \cdot 3 = \underline{\underline{3e^{3x}}}$

ii) $g'(x) = (3x+1)' \cdot e^{x} + (3x+1) \cdot (e^{x})'$

$= 3 \cdot e^{x} + (3x+1) \cdot e^{x}$

$= (3 + 3x + 1) \cdot e^{x} = \underline{\underline{(3x+4)e^{x}}}$

iii) $h'(x) = (2x)' + (\ln(x+2))'$

$= 2 + \frac{1}{x+2} \cdot (x+2)'$

$= 2 + \frac{1}{x+2} \cdot 1 = \frac{2\cdot(x+2)}{x+2} + \frac{1}{x+2} = \underline{\underline{\frac{2x+5}{x+2}}}$

b) De tre funksjonene f, g og h er gitt i punkt a):

i) Bestem både $f(0)$ og $f'(0)$.

ii) Finn skjæringspunktene mellom grafen til g og koordinataksene.

iii) Finn skjæringspunktet mellom grafen til h og den rette linja $y = 2x$.

i) $f(x) = e^{3x}$

$f(0) = e^{3\cdot 0} = e^{0} = \underline{\underline{1}}$

$f'(x) = 3e^{3x}$

$f'(0) = 3e^{3\cdot 0} = 3e^{0} = 3 \cdot 1 = \underline{\underline{3}}$

ii) $g(x) = (3x+1)e^{x}$

Skjæringspkt. med y-aksen (sett $x = 0$): $y = g(0) = (3\cdot 0 + 1)e^{0} = (0+1)\cdot 1 = 1$

Skjæringspkt. med x-aksen (sett $y = 0$): $y = g(x) = (3x+1)e^{x} = 0$ NB! $e^{x} \neq 0$

$3x + 1 = 0 \rightarrow 3x = -1 \rightarrow x = \frac{-1}{3}$

Skjæringspkt. med aksene er altså: $\underline{\underline{(x,y) = (0,1)}}$ og $\underline{\underline{(x,y) = (-\frac{1}{3}, 0)}}$

iii) $h(x) = 2x + \ln(x+2)$

Skjæringspkt. mellom h og linja $y = 2x$: $y = h(x) = 2x$

$2x + \ln(x+2) = 2x \rightarrow \ln(x+2) = 0 \quad | \; e^{()}$

$e^{\ln(x+2)} = e^{0}$

$x + 2 = 1$

$x = 1 - 2$

$x = -1$

og

$\underline{\underline{y = -2}}$

Kontroll:

Linja → $y = 2\cdot(-1) = -2$

$y = h(-1) = 2\cdot(-1) + \ln(-1+2) = -2 + \underbrace{\ln 1}_{=0} = -2 \longrightarrow$

Oppgave 3

a) Mia har satt i banken et beløp på 60 000 kr til en rente på 3 % årlig.

Hva er verdien av beløpet etter 1 år og etter 4 år?

Sluttverdi etter 1 år: $K_1 = 60\,000 \cdot 1.03^1 = \underline{\underline{61\,800}}$

Sluttverdi etter 4 år: $K_4 = 60\,000 \cdot 1.03^4 = \underline{\underline{67\,530.53}}$

Hvor mange år tar det før beløpet er vokst til 90 000 kr?

Søker antall år n slik at: $K_n = 60\,000 \cdot 1.03^n = 90\,000$

$$1.03^n = \frac{90\,000}{60\,000} = 1.5 \quad \Big| \; ln(\,)$$

$$n \cdot ln\,1.03 = ln\,1.5 \quad \longrightarrow \quad n = \frac{ln\,1.5}{ln\,1.03} \approx \underline{\underline{13.7}} \ \text{(år)}$$

Hva måtte årlig rente være for at beløpet skulle ha vokst til 90 000 kr etter 10 år?

Sluttverdi etter 10 år: $60\,000 \cdot (1+r)^{10} = 90\,000 \quad \longrightarrow \quad (1+r)^{10} = \frac{90\,000}{60\,000} = 1.5$

Tar 10.rota på begge sider: $1 + r = 1.5^{\frac{1}{10}} \quad \longrightarrow \quad r = 1.5^{\frac{1}{10}} - 1 = 0.041379\ldots$

$$\underline{\underline{r \approx 4.14\,\%}}$$

b) Mads har lånt 1 500 000 kr til kjøp av leilighet. Renten på lånet er 6 % årlig, og lånet betales over 20 år med like store årlige beløp, første gang var ett år etter låneopptaket. Hva er det årlige beløpet Mads betaler på lånet?

Årlig betaling K (via låneformelen): $K = K_0 \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$

Lånet: $K_0 = 1\,500\,000$
Årlig rente: $r = 0.06$
Antall år: $n = 20$

Dvs. $K = 1\,500\,000 \cdot \frac{0.06 \cdot 1.06^{20}}{1.06^{20} - 1} = \underline{\underline{130\,776.84}}$

Mia planlegger å sette inn et månedlig innskudd på 6 000 kr i banken til 0.5 % månedlig rente. Hvor mye vil hun ha på konto etter tre år, dvs. rett (umiddelbart) etter det 36. innskuddet?

(Formelsamlingen) **Oppsparingsannuitet:** $V = K \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

Månedsrente: $r = 0.005$
Antall måneder: $n = 36 \ (= 3 \times 12\ mnd.)$
Månedlig sparing: $K = 6000$

Sluttverdi av sparing: $V = 6000 \cdot \frac{1.005^{36} - 1}{0.005} = \underline{\underline{236\,016.63}}$

Oppgave 4

Funksjonen h er gitt ved at: $h(x, y) = 2 + 6x - 3xy + 3y^2$

a) Finn de partielle deriverte av 1. og 2. orden for funksjonen h.

Partielle deriverte av 1. orden: $\frac{\partial h}{\partial x} = 6 - 3y$ og $\frac{\partial h}{\partial y} = -3x + 6y$

2. orden: $\underbrace{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0}_{A}$, $\underbrace{\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = -3 = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = -3}_{B}$, $\underbrace{\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 6}_{C}$

Vis at h har kun ett stasjonært punkt: $(4, 2)$.

$\frac{\partial h}{\partial x} = 6 - 3y = 0 \xrightarrow{1} -3y = -6 \xrightarrow{2} \boldsymbol{y = 2}$

og

$\frac{\partial h}{\partial y} = -3x + 6y = 0 \xrightarrow{4} -3x + 6 \cdot 2 = 0 \xrightarrow{5} -3x = -12$, dvs. $\boldsymbol{x = 4}$

Altså, ett stp.pkt: $\underline{\underline{(4, 2)}}$

Klassifiser det stasjonære punktet.

St.pkt	A	C	B	$\Delta = AC - B^2$	Type
$(4, 2)$	0	6	-3	$0 \cdot 6 - (-3)^2 = -9$ $(\Delta < 0)$	$\underline{\underline{\text{Sadelpunkt}}}$

b) Finn funksjonsverdien for h i punktet $(4, 3)$.

$z = h(4, 3) = 2 + 6 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 = 2 + 24 - 36 + 27 = \underline{\underline{17}}$

Bestem maksimum for funksjonen h under bibetingelsen: $-x + 2y = 2$.

Bibetingelsen kan omskrives til : $x = 2y - 2$

Setter inn for x (substituerer) i h:

$$z = h(x, y) = h(2y - 2, y) = 2 + 6(2y - 2) - 3(2y - 2)y + 3y^2$$
$$= 2 + 12y - 12 - 6y^2 + 6y + 3y^2 = -3y^2 + 18y - 10 = g(y)$$

$g'(y) = -6y + 18 = -6(y - 3) = 0$, $\underline{\text{dvs. } y = 3} \longrightarrow x = 2 \cdot 3 - 2 = 6 - 2$ $\underline{\text{dvs. } x = 4}$

Maksimum? Sjekk g'': $g''(y) = -6 < 0$, dvs. g er konkav og har maksimum

$g(3) = -3 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 - 10 = -27 + 54 - 10 = 17$

Konklusjon - Maksimum for h under bibetingelsen: $\underline{\underline{z = h(4, 3) = 17}}$ (kontroll ok)